

哥德巴赫猜想 与 优化筛法

Goldbach Hypothesis and
Optimization Sieve Method

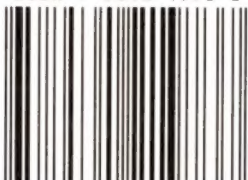
司钊 司琳 SIZHAO SILIN

西北工业大学出版社

- 策划编辑/蒋民昌
- 责任编辑/王俊轩
- 封面设计/王 祚

Goldbach Hypothesis and Optimization Sieve Method

ISBN 7-5612-1973-3



9 787561 219737 >

ISBN 7-5612-1973-3 / O • 273

定价: 28.00元

O156
21

哥德巴赫猜想与优化筛法

司钊 司琳 著

西北工业大学出版社

【内容简介】本书着重推介一种有别于 Brun 筛法和 Selberg 筛法的新型优化筛法。其特点是简单易懂、便于操作、适用性广。

作为该优化筛法的应用实例,书中对至今用其他方法尚未解决的 14 个数论问题逐个进行了论证。同时,对每个命题都给出了具体的求解方法、运算程序及实筛数据。书末附有 20 万以内的素数表用于数据查验。

本书可供相关专业的教学与科研工作者阅读,亦可供大学数理系高年级学生、研究生参考。

图书在版编目(CIP)数据

哥德巴赫猜想与优化筛法/司钊,司琳著. —西安:西北工业大学出版社, 2005.9

ISBN 7 - 5612 - 1973 - 3

I. 哥… II. ①司… ②司… III. ①哥德巴赫猜想 ②筛法 IV.O156

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 086603 号

出版发行:西北工业大学出版社

通信地址:西安市友谊西路 127 号 邮编:710072

电 话:029-88493844 88491757

网 址:www.nwpup.com

印 刷 者:西安新华印刷厂印刷

开 本:850 mm×1 168 mm 1/32

印 张:16.625

字 数:367 千

版 次:2005 年 9 月第 1 版 2005 年 9 月第 1 次印刷

印 数:1~3 000 册

定 价:28.00 元

前 言

自 1920 年出现 Brun 筛法后的几十年间,筛法在数论研究中所获得的卓越成效是显而易见的。不过,上个世纪末期至今,面对数论中许多遗留问题,现有筛法似乎遇到了极大困难。由此,自然会促使人们去做出新的思考和尝试,寻求新的突破。在这方面,笔者也做了一些工作,现汇集成册,提供大家参考。

这里主要推介一种新型的优化筛法。该筛法比目前应用最广,效能最强的 Selberg 筛法具有明显的优越性。用该筛法求证的哥德巴赫猜想等 14 个数论问题也是至今用其他方法都没有解决的问题,并且其适用范围绝不局限于这 14 个数论问题,而具有广泛的适用性。希望它能对读者感兴趣的研究课题有所帮助。

此项工作得到航天工业总公司七七一所党政领导的关怀和支持,在此深表谢意。同时,还得到厦门大学姚宗元教授,西北大学胡希正教授、赵宪钟教授,西北工业大学杜文奎教授,航天测控公司廖道文研究员,航天七一〇所张忠洲高工,航天七七一所于伦政研究员、孟小锁研究员、何鸿生研究员、王宇水高工以及裴娟和王艳同志的热情支持和大力帮助,在此一并表示谢意。

最后还要特别感谢西北工业大学出版社的领导和同志们,在编辑和出版工作中给予的大力支持和合作。

书中不妥之处,敬请批评指正。

作 者

2005.7.8

Email: pls33@163.com

目 录

引言	1
第一章 通用筛函数	4
1.1 概述	4
1.2 欧拉 (Euler) 函数	5
1.3 Eratosthenes 筛法	10
1.4 自然数列的通用筛函数	14
1.5 通用筛函数的下界	19
1.6 预备定理	21
第二章 哥德巴赫猜想	29
2.1 求解证明	29
2.2 解的完备性问题	39
2.3 求解程序	41
2.4 实筛数据	51
第三章 偶数表为二素数之差	85
3.1 求解证明	85
3.2 解的无限性	93
3.3 小偶数的求证方法	94
3.4 求解程序	95
3.5 实筛数据	102

第四章 含素因子 3, 5 的偶数	110
4.1 求解证明	110
4.2 解的完备性问题	124
4.3 求解程序	127
4.4 实筛数据	138
第五章 素数的分项表示问题	141
5.1 求解证明	141
5.2 求解程序	150
5.3 实筛数据	158
第六章 孪生素数	163
6.1 求解证明	163
6.2 孪生素数的无限性	170
6.3 孪生素数的补充解	171
6.4 求解程序	172
6.5 实筛数据	180
第七章 双孪生素数	195
7.1 求解证明	195
7.2 双孪生素数的无限性	209
7.3 求解程序	209
7.4 实筛数据	217
第八章 展翅孪生素数	220
8.1 求解证明	220

8.2 展翅孪生素数的无限性·····	234
8.3 求解程序·····	234
8.4 实筛数据·····	242
第九章 相邻等差三素数·····	248
9.1 求解证明·····	248
9.2 相邻三素数等差级数的无限性·····	259
9.3 求解程序·····	260
9.4 实筛数据·····	267
第十章 相邻等差四素数·····	272
10.1 求解证明·····	272
10.2 相邻四素数等差级数的无限性·····	283
10.3 求解程序·····	283
10.4 实筛数据·····	291
第十一章 相邻等距三孪生素数·····	293
11.1 求解证明·····	293
11.2 相邻等距三孪生素数的无限性·····	306
11.3 求解程序·····	306
11.4 实筛数据·····	315
第十二章 素数等差级数·····	316
12.1 求解证明·····	317
12.2 求解程序·····	327
12.3 实筛数据·····	339

第十三章 孪生素数组成的双等差级数·····	345
13.1 求解证明·····	345
13.2 求解程序·····	357
13.3 实筛数据·····	369
第十四章 递减的素数间隙·····	372
14.1 求解证明·····	372
14.2 素数三间隙递减组合的无限性·····	382
14.3 求解程序·····	382
14.4 实筛数据·····	390
第十五章 递增的素数间隙·····	395
15.1 求解证明·····	395
15.2 素数三间隙递增组合的无限性·····	405
15.3 求解程序·····	405
15.4 实筛数据·····	412
第十六章 哥德巴赫猜想第二证法·····	417
16.1 求解证明·····	417
16.2 解的完备性问题·····	426
16.3 求解程序·····	428
16.4 实筛数据·····	436
附表 200000 以内的素数表·····	446
参考文献·····	521

引 言

筛法是数论中常见的一种方法。最早的筛法是由古希腊埃拉托斯染尼氏 (Eratosthenes) 所创立的用来寻找素数的方法, 经过布朗 (Brun) 和泽尔贝格 (Selberg) 等人的逐步改进才有了更为普遍的实用价值, 并成为数论研究中的一个重要方法。例如, 对哥德巴赫猜想的研究, 至今几乎所有最好的结果都是利用加权形式的 Selberg 筛法得到的。

不过, 现有“筛法”仍存在值得改进之处, 大家知道, Eratosthenes 筛法一般形式的数学表达式为

$$|N_B| = \sum_{d|k} \mu(d) |N_d|$$

式中: $|N_B|$ 通常称为筛函数, 表示正整数集合 N 中所有与正整数 k 互素的元素的个数;

$|N_d|$ 表示正整数集合 N 中能被正整数 d 整除的元素的个数;

$\mu(d)$ 为茂比乌斯 (Möbius) 函数;

k 通常为不超过某一给定数值的全部素数的乘积。

这种筛法的基本构思是:

(1) 针对具体命题和欲达到的效果选取合适的被筛对象 (即被筛集合) N , 并确定正整数 k 的所有素因子。

(2) 明确筛选条件: 即从集合 N 中分选出所有与 k 互素的元素, 组成子集 N_B 。

(3) 对子集 N_B 的基数 $|N_B|$ (即筛函数) 进行上、下界估计。

遗憾的是,除了个别情况,一般而言上述筛函数表达式中的 $|N_d|$ 不单没有一个直观的显函数表达式,而且也很难找到一个符合要求的近似式给以表述。从而,就产生了对 $|N_B|$ 进行上、下界估计的具体困难,为了解决这一困难,先后出现了 Brun 筛法和 Selberg 筛法。

Brun 筛法和 Selberg 筛法在基本构思上与 Eratosthenes 筛法是完全一致的,所不同的只是后来者在筛函数 $|N_B|$ 的上、下界估计方法上作了有效的改进。所以 Brun 筛法和 Selberg 筛法比 Eratosthenes 筛法虽然具有更为普遍的实用价值,但仍显不足。关键在于此类筛法的共同缺陷——即被筛集合的多样性和复杂性与筛选条件的相对单调,影响了筛法更为广阔的应用范围和更为理想的使用效果。

实际上,对于 Eratosthenes 筛法还可以开阔思路,从多个角度进行思考和改进。循此,我们作了以下几方面的工作。

(1) 简化被筛集合,尽量使其单一化和简单化。

(2) 采用灵活多样的筛选条件以适应各种命题的具体要求来达到预期的效果。

(3) 寻求一种相对简单又易于操作的筛函数通用表示形式。

(4) 寻求一种相对简单又易于操作的筛函数通用边界公式。

自 2000 年以来,我们所进行的这些工作已经有了明显的进展。应用经过改进之后的这种筛选方法,曾先后对十余个数论命题进行试证皆取得了满意的效果。这些命题基本上都是至今用其他方法尚未能解决的,其中包括“哥德巴赫猜想”、“孪生素数猜想”、“相邻等差三素数问题”、“素数等差级数问题”……这些公认的共同关注问题。

特别值得指出的是,此新筛法不仅简单易懂,便于操作,而

且在求证所论命题时,若有必要,还能给出全解的具体求解方法。

书中第一章所论是后面各章节的基础。从第二章以后,每一章都独立阐述求证一个命题,相互之间没有关联,故每一章的各种表示符号都仅限于本章的定义范围。

为了便于读者对书中各章论述内容的验证运算,所有各章的验算筛选程序都可以从网上方便地下载。

网站: www.mathsfancy.com

第一章 通用筛函数

1.1 概述

相对于随意有限正整数集合(元素可重复)而言,有限正整数等差数列集合是比较简单的一种。而在有限正整数等差数列集合中,公差为1的有限自然数列集合最为简单。

显然,任何一种筛法,其筛函数的复杂程度和难易水平都与下面两个因素有关:①被筛集合②筛选条件。被筛集合越简单对应的筛函数则相应简单且易于处理操作。从这个意义上讲,当选择被筛集合时,在能达到同样效果的前题下,自然应该选择最简单的被筛集合。基于这一考虑,以下讨论中所涉及到的“被筛集合”都选择“有限自然数列集合”(或简称为自然数列)。下面再就其它几个问题给以定义和表述。

一、定义。

(1) 正整数等差数列集合 N

$$N = (C_i, i=1,2,\dots,n) \quad (1)$$

$$C_i = C_1 + (i-1)\Delta, \quad i=1,2,\dots \quad (2)$$

式中: C_1 和 Δ 为正整数。

C_1 称为该正整数等差数列集合的“首项”。

Δ 称为该正整数等差数列集合的“公差”。

(2) 自然数列集合即为公差 $\Delta=1$ 的正整数等差数列集合。

(3) 模数集合 P :

$$P = (p_1, p_2, \dots, p_r)$$

由 r 个(r 为任意给定的正整数)互不相同的素数组成的素数集合 P , 其中元素做为筛选模数使用时, 素数集合 P 称为模数集合。

二、正整数等差数列集合的基本特征

特征 1: 正整数等差数列集合中没有重复的元素。

特征 2: 正整数等差数列集合中任意相邻两元素之间的差值都等于公差 Δ 。

特征 3: 当素数 p_i 与公差 Δ 互素时, 公差为 Δ 的正整数等差数列集合中任意相邻的 p_i 个元素都构成模 p_i 的完全剩余组。

上述前两项特征显而易见, 关于第三项特征证明如下。

证: 在正整数等差数列集合 N 中任取相邻的 p_i 个元素, 设其中最小的一个为 h , 则这 p_i 个元素分别为

$$h, h + \Delta, \dots, h + (p_i - 1)\Delta$$

它们每两两之间的差值可用 $\beta\Delta$ 统一表示。这里 β 为不超过 $(p_i - 1)$ 的正整数, 故 β 不能被 p_i 整除。公差 Δ 与 p_i 互素, 故不能被 p_i 整除。由此可见, 乘积 $\beta\Delta$ 不能被素模数 p_i 整除。所以, 这 p_i 个元素每两两之间对模 p_i 皆不同余。自然, 对模 p_i 两两不同余的 p_i 个元素即构成模 p_i 的完全剩余组。

不言而喻, 自然数列集合是公差 $\Delta = 1$ 的正整数等差数列集合, 当然具有正整数等差数列集合的一切特征。

当我们选定自然数列集合为被筛集合以后, 可以从如下两个简单实例入手进行探讨。

1.2 欧拉(Euler)函数

根据定义, 欧拉函数 $\varphi(n)$ 表示不超过 n 而与 n 互素的正整数个数(n 为正整数)。将不超过 n 的全部正整数集合用 N 表示,

则欧拉函数 $\varphi(n)$ 即是集合 N 中所有与 n 互素的元素的个数。

设 n 的标准的素因子分解式为

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s} \quad (3)$$

将 p_1, p_2, \dots, p_s 构成的素数集合用 P 表示:

$$P = (p_1, p_2, \dots, p_s)$$

因为与 n 互素的元素必然都不含 (p_1, p_2, \dots, p_s) 这些素因子, 所以集合 N 中与 n 互素的元素应满足下面的筛选条件:

$$g \not\equiv 0 \pmod{p_i} \quad i = 1, 2, \dots, s \quad (4)$$

g 表示集合 N 中被选取的元素。

集合 N 称为被筛集合, 集合 P 称为模数集合。

显然, 这里 N 为公差 $\Delta=1$ 的“正整数等差数列集合”。其基数 $|N| = n$ 。

我们知道, 集合 N 中全部元素按模 p_i 可分为 p_i 个同余类子集, 余数为零的同余类称做“零同余类子集”。余数为 1 的同余类称做“1 同余类子集”, ……余数为 p_i-1 的同余类称做“ p_i-1 同余类子集”。

命, $N_{ti}(\bmod p_i)$ 表示集合 N 对模 p_i 的“ ti 同余类子集”。

($i = 1, 2, \dots, s$; $ti = 0, 1, \dots, p_i - 1$)

由筛选条件 (4) 式可知:

$$\varphi(n) = \left| \bigcap_{i=1}^s \bigcup_{ti=1}^{p_i-1} N_{ti}(\bmod p_i) \right| \quad (5)$$

式中: $|X|$ 表示集合 X 的基数, (下同)

由于集合 N 为“正整数等差数列集合”且其公差与 n 互素, 根据正整数等差数列集合的基本特征可知, 若以 n 的素因子 p_i 为模数, 集合 N 中恰好含有 n/p_i 个模 p_i 的完全剩余组, 每个完全

剩余组中的元素又分别属于 p_i 个同余类子集中的每个子集各一个元素。故模 p_i 的每个同余类子集都有相同的元素个数。

$$|N_{ti}(\bmod p_i)| = \frac{n}{p_i} \quad (i=1,2,\dots,s; \quad ti=0,1,\dots,p_i-1) \quad (6)$$

由筛选条件 (4) 式可见, 对模数 p_i 而言, 集合 N 中被筛掉的元素仅为零同余类子集的元素, 而其它同余类子集中的元素都暂被保留下来, 即对模 p_i 而言, 被选取的元素应为下述集合中的元素:

$$YN(\bmod p_i) = \bigcup_{ti=1}^{p_i-1} N_{ti}(\bmod p_i) \quad (7)$$

$YN(\bmod p_i)$ 表示集合 N 中按模 p_i 被选取的元素集合。

因为, 对同一模数的各同余类子集相互之间的交集皆为空集, 即:

$$N_{ti1}(\bmod p_i) \cap N_{ti2}(\bmod p_i) = \emptyset \quad (8)$$

$$ti1 \neq ti2$$

所以

$$|YN(\bmod p_i)| = \sum_{ti=1}^{p_i-1} |N_{ti}(\bmod p_i)| = (p_i-1) \frac{n}{p_i} \quad (9)$$

$$(i=1,2,\dots,s)$$

$$\text{命} \quad k_i = \frac{(p_i-1)}{p_i} \quad (i=1,2,\dots,s) \quad (10)$$

$$\text{得} \quad |YN(\bmod p_i)| = nk_i \quad (i=1,2,\dots,s) \quad (11)$$

$$k_i = |YN(\bmod p_i)| \left(\frac{1}{n} \right) \quad (i=1,2,\dots,s) \quad (12)$$

由 (12) 式可见, k_i 表示集合 N 中按模 p_i 被选取的元素个

数与集合 N 中全部元素个数的比值。我们将 k_i 称做按模 p_i 的“筛选系数”。

由 (6) 式知, 集合 N 中随意一个模 p_1 的同余类子集的基数为:

$$|N_{t1}(\bmod p_1)| = \frac{n}{p_1} \quad (t1 = 0, 1, \dots, p_1 - 1) \quad (13)$$

显然, 该子集 $N_{t1}(\bmod p_1)$ 为“正整数等差数列集合”其公差 $\Delta = p_1$ 。若以 p_2 为模数, 由于模数 p_2 与“正整数等差数列集合” $N_{t1}(\bmod p_1)$ 的公差 p_1 互素, 根据正整数等差数列集合的基本特征同前推理, 可知集合 $N_{t1}(\bmod p_1)$ 中模 p_2 的同余类子集基数为

$$\begin{aligned} & |\{N_{t1}(\bmod p_1)\}_{t2}(\bmod p_2)| = \\ & |N_{t1}(\bmod p_1)| \left(\frac{1}{p_2} \right) = \frac{n}{p_1 p_2} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \text{由于} \quad & |\{N_{t1}(\bmod p_1)\}_{t2}(\bmod p_2)| = \\ & |N_{t1}(\bmod p_1) \cap N_{t2}(\bmod p_2)| \end{aligned} \quad (15)$$

$$\text{知} \quad |N_{t1}(\bmod p_1) \cap N_{t2}(\bmod p_2)| = \frac{n}{p_1 p_2} \quad (16)$$

$$(t1 = 0, 1, \dots, p_1 - 1; \quad t2 = 0, 1, \dots, p_2 - 1)$$

集合 $N_{t1}(\bmod p_1)$ 中除去模 p_2 的“零同余类子集”外, 其余所有模 p_2 的同余类子集的并集基数为

$$\begin{aligned} & |N_{t1}(\bmod p_1) \cap \bigcup_{t2=1}^{p_2-1} N_{t2}(\bmod p_2)| = \\ & \left| \bigcup_{t2=1}^{p_2-1} \{N_{t1}(\bmod p_1) \cap N_{t2}(\bmod p_2)\} \right| = \end{aligned}$$

$$\sum_{t_2=1}^{p_2-1} |N_{t_1}(\bmod p_1) \cap N_{t_2}(\bmod p_2)| = \frac{(p_2-1)n}{p_1 p_2} \quad (t_1 = 0, 1, \dots, p_1-1) \quad (17)$$

对于集合 N 中多个模 p_1 的同余类子集而言则有

$$\begin{aligned} & \left| \bigcup_{t_1=1}^{p_1-1} N_{t_1}(\bmod p_1) \cap \bigcup_{t_2=1}^{p_2-1} N_{t_2}(\bmod p_2) \right| = \\ & \left| \bigcup_{t_1=1}^{p_1-1} \{N_{t_1}(\bmod p_1) \cap \bigcup_{t_2=1}^{p_2-1} N_{t_2}(\bmod p_2)\} \right| = \\ & \sum_{t_1=1}^{p_1-1} |N_{t_1}(\bmod p_1) \cap \bigcup_{t_2=1}^{p_2-1} N_{t_2}(\bmod p_2)| = \\ & (p_1-1)(p_2-1) \frac{n}{p_1 p_2} = n k_1 k_2 \end{aligned} \quad (18)$$

由于 $N_{t_1}(\bmod p_1) \cap N_{t_2}(\bmod p_2)$ 仍为“正整数等差数列集合”，其公差 $\Delta = p_1 p_2$ 。若以 p_3 为模数，则模数 p_3 与公差 $p_1 p_2$ 互素，根据正整数等差数列集合的基本特征同上推导可得

$$\left| \bigcap_{i=1}^3 \bigcup_{t_i=1}^{p_i-1} N_{t_i}(\bmod p_i) \right| = n k_1 k_2 k_3 \quad (19)$$

依次类推，即得

$$\left| \bigcap_{i=1}^s \bigcup_{t_i=1}^{p_i-1} N_{t_i}(\bmod p_i) \right| = n \prod_{i=1}^s k_i \quad (20)$$

将 (20) 式代入 (5) 式得

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^s k_i \quad (21)$$

将 (10) 式代入 (21) 式可得欧拉函数表达式

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \quad (22)$$

1.3 Eratosthenes 筛法

将不超过正整数 n 的全部正整数集合用 N 表示, 则集合 N 为公差 $\Delta=1$ 的“正整数等差数列集合”其基数 $|N|=n$ 。

设 p_1, p_2, \dots, p_r 为互不相同的 r 个素数。

集合 $P = (p_1, p_2, \dots, p_r)$

$$K = \prod_{i=1}^r p_i \quad (23)$$

求集合 N 中所有与 K 互素的元素个数。

因为与 K 互素的元素必然不含 K 的任何一个素因子, 所以, 集合 N 中与 K 互素的元素应当满足如下筛选条件,

$$g \not\equiv 0 \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (24)$$

g 表示集合 N 中被选取的元素。

集合 N 为被筛集合, 集合 P 为模数集合。

命 $N_{ti}(\bmod p_i)$ 表示集合 N 对模 p_i 的“ ti 同余类子集”
($i=1, 2, \dots, r$; $ti=0, 1, \dots, p_i-1$)

$S(N, K)$ 表示集合 N 中所有与 K 互素的元素个数。由筛选条件 (24) 式可知:

$$S(N, K) = \left| \bigcap_{i=1}^r \bigcup_{ti=1}^{p_i-1} N_{ti}(\bmod p_i) \right| \quad (25)$$

用模数 p_i 去除集合 N 的基数可得

$$n = p_i \left[\frac{n}{p_i} \right] + n_i \quad (26)$$

式中: $[n/p_i]$ 表示 n/p_i 的整数部分 (下同)。

n_i 为 n 对模 p_i 的非负的最小剩余。

被筛集合 N 为公差 $\Delta=1$ 的正整数等差数列集合, 根据正整数等差数列集合的基本特征, 由 (26) 式知集合 N 中包含有 $[n/p_i]$ 个模 p_i 的完全剩余组再加 n_i 个单独的元素。每个完全剩余组中的元素分别属于 p_i 个同余类子集中每个子集一个元素, 另外的 n_i 个单独元素分别属于余数为 $1, 2, \dots, n_i$ 的 n_i 个同余类子集各一个元素, 故知集合 N 对模 p_i 的同余类子集基数为

$$|N_{ti}(\bmod p_i)| = \left[\frac{n}{p_i} \right] + Q_{ti} \quad (27)$$

$$Q_{ti} = 0 \quad (ti = 0 \text{ 或 } ti > n_i)$$

$$Q_{ti} = 1 \quad (1 \leq ti \leq n_i)$$

由筛选条件 (24) 式可知, 对模数 p_i 而言被筛掉的只是模 p_i 的“零同余类子集”, 其余同余类子集将被保留下来, 亦即对模 p_i 而言, 被选取的元素集合为:

$$YN(\bmod p_i) = \bigcup_{ti=1}^{p_i-1} N_{ti}(\bmod p_i) = N - N_0(\bmod p_i) \quad (28)$$

$$|YN(\bmod p_i)| = n - \left[\frac{n}{p_i} \right] = n \left\{ 1 - \left[\frac{1}{p_i} \right] \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (29)$$

式中: $[1/p_i]$ 作为“算符”定义, 须在乘入基数后才可作数值计算, (下同)。

$$\text{令 } k_i = 1 - \left[\frac{1}{p_i} \right], \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (30)$$

代入 (29) 式得

$$|YN(\bmod p_i)| = nk_i, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (31)$$

k_i 称做按模 p_i 的“分选系数”。

显然, 集合 N 对模 p_1 的随意一个同余类子集 $N_{i1}(\bmod p_1)$ 都是“正整数等差数列集合”, 其公差 $\Delta = p_1$ 。若以 p_2 为模数, 则模数 p_2 与子集 $N_{i1}(\bmod p_1)$ 的公差 p_1 互素, 根据正整数等差数列集合的基本特征, 同前推理可知集合 $N_{i1}(\bmod p_1)$ 中模 p_2 的“零同余类子集”基数为

$$\begin{aligned} |\{N_{i1}(\bmod p_1)\}_{i0}(\bmod p_2)| &= |N_{i1}(\bmod p_1) \cap N_0(\bmod p_2)| = \\ &= \left[\left| N_{i1}(\bmod p_1) \right| \left(\frac{1}{p_2} \right) \right] \end{aligned} \quad (32)$$

“零同余类子集”除外的其它各同余类子集的并集基数为:

$$\begin{aligned} & \left| \bigcup_{i2=1}^{p_2-1} \{N_{i1}(\bmod p_1)\}_{i2}(\bmod p_2) \right| = \\ & \left| N_{i1}(\bmod p_1) \cap \bigcup_{i2=1}^{p_2-1} N_{i2}(\bmod p_2) \right| = \\ & \left| N_{i1}(\bmod p_1) \right| - \left[\left| N_{i1}(\bmod p_1) \right| \left(\frac{1}{p_2} \right) \right] = \\ & \left| N_{i1}(\bmod p_1) \right| \left\{ 1 - \left[\frac{1}{p_2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (33)$$

$$i1 = 0, 1, \dots, p_1 - 1$$

对于集合 N 中多个模 p_1 的同余类子集而言则有

$$\begin{aligned} & \left| \bigcup_{i1=1}^{p_1-1} N_{i1}(\bmod p_1) \cap \bigcup_{i2=1}^{p_2-1} N_{i2}(\bmod p_2) \right| = \\ & \left| \bigcup_{i1=1}^{p_1-1} \{N_{i1}(\bmod p_1) \cap \bigcup_{i2=1}^{p_2-1} N_{i2}(\bmod p_2)\} \right| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i1=1}^{p_1-1} |N_{i1}(\bmod p_1)| \bigcap \bigcup_{i2=1}^{p_2-1} N_{i2}(\bmod p_2) | = \\
& \sum_{i1=1}^{p_1-1} |N_{i1}(\bmod p_1)| \{1 - [\frac{1}{p_2}]\} = \\
& \{1 - [\frac{1}{p_2}]\} \{|N| - |N_0(\bmod p_1)|\} = \\
& \{1 - [\frac{1}{p_2}]\} \{n - [\frac{n}{p_1}]\} = \\
& n\{1 - [\frac{1}{p_1}]\} \{1 - [\frac{1}{p_2}]\} = nk_1k_2 \quad (34)
\end{aligned}$$

由于 $N_{i1}(\bmod p_1) \bigcap N_{i2}(\bmod p_2)$ 仍为“正整数等差数列集合”，其公差 $\Delta = p_1p_2$ 。若以 p_3 为模数，则模数 p_3 与公差 p_1p_2 互素，根据正整数等差数列集合的基本特征同上推导可得：

$$|\bigcap_{i=1}^3 \bigcup_{ti=1}^{p_i-1} N_{ti}(\bmod p_i)| = nk_1k_2k_3 \quad (35)$$

依次类推，即得

$$|\bigcap_{i=1}^r \bigcup_{ti=1}^{p_i-1} N_{ti}(\bmod p_i)| = n \prod_{i=1}^r k_i \quad (36)$$

将 (36) 式代入 (25) 式得

$$S(N, K) = n \prod_{i=1}^r k_i \quad (37)$$

再将 (30) 式代入 (37) 式可得

$$S(N, K) = n \prod_{i=1}^r \{1 - [\frac{1}{p_i}]\} \quad (38)$$

将 (38) 式展开，得

$$S(N, K) = n + \sum_{j=1}^r (-1)^j \sum_{i_1=1}^r \dots \sum_{i_j=1}^r \left[\frac{n}{p_{i1} p_{i2} \dots p_{ij}} \right] \quad (39)$$

$$i_1 < i_2 < \dots < i_j$$

引入 Möbius 函数, 得

$$S(N, K) = \sum_{d|k} \mu(d) |N_d| \quad (40)$$

$|N_d|$ 表示集合 N 中能被正整数 d 整除的元素的个数。

(40) 式称为 Eratosthenes 筛法。

1.4 自然数列的通用筛函数

通过上述两个实例我们可以看到, 当被筛集合选用自然数列集合, 当模数集合 P 中元素为互不相同的素数时, 其筛函数都具有如 (21) 式和 (37) 式一样的相对简单的表述形式。即有:

$$|N_B| = |N| \prod_{i=1}^r k_i$$

式中: $|N_B|$ 表示筛函数。

$|N|$ 表示被筛集合的基数。

k_i 为依照筛选条件按模 p_i 的分选系数。

r 为模数集合中素数的个数。

假若在保持被筛集合仍选用自然数列集合, 模数集合 P 中元素仍为互不相同的素数的前题下, 能够采用改变筛选条件的办法以适应各种命题的具体要求来达到预期的效果, 则有希望将上述这种相对简单的筛函数表示式通用化、标准化, 从而达到简化运算操作的目的。

分析上述筛法的基本概念不难看出, 不同的筛选条件最终都体现为被选取的同余类子集的差异。只要我们考虑到被选取的同

余类子集的各种可能性, 则所求筛函数必然有广泛的适用性。下面就此给以推论。

将不超过正整数 n 的全部正整数集合用 N 表示, 则 N 为公差 $\Delta=1$ 的“正整数等差数列集合”, 简称“自然数列”, 其基数 $|N|=n$ 。

设 p_1, p_2, \dots, p_r 为互不相同的 r 个素数。将这 r 个素数组成的集合用 P 表示为

$$P = (p_1, p_2, \dots, p_r)$$

p_i 为集合 P 中任一元素, 以 p_i 为模数, 集合 N 中全部元素可分为 p_i 个同余类子集。

$N_{ti}(\bmod p_i)$ 表示集合 N 中模 p_i 的“ ti 同余类子集”。

$N_{si}(\bmod p_i)$ 表示集合 N 中被选取的第 si 个模 p_i 的同余类子集 (si 只是一个序号, 与该同余类子集对应的余数无关)。

$\bigcup_{si=1}^{\alpha_i} N_{si}(\bmod p_i)$ 表示集合 N 中随意被选取的 α_i 个模 p_i 的同

余类子集的并集。

给定筛选条件:

$$g \in \bigcup_{Si=1}^{\alpha_i} N_{Si}(\bmod p_i), \quad i=1, 2, \dots, r \quad (41)$$

g 表示集合 N 中被选取的元素。

求集合 N 中满足 (41) 式筛选条件的元素个数, 即筛函数。

将满足 (41) 式筛选条件的元素集合用 N_B 表示, 则集合 N_B 的基数 $|N_B|$ 就是所要求的筛函数。从筛选条件 (41) 式直接可得

$$|N_B| = \left| \bigcap_{i=1}^r \bigcup_{Si=1}^{\alpha_i} N_{Si}(\bmod p_i) \right| \quad (42)$$

下面具体求证 (42) 式的函数表达式,

已知集合 N 的基数 n 可用下式表述,

$$n = p_i \left[\frac{n}{p_i} \right] + n_i \quad (43)$$

根据正整数等差数列集合的基本特征, 集合 N 中含有 $[n/p_i]$ 个模 p_i 的完全剩余组, 外加 n_i 个单独的元素. 每个完全剩余组中的元素分属于全部 p_i 个同余类子集中每个子集一个元素, 另外的 n_i 个单独元素分别属于余数为 $1, 2, \dots, n_i$ 的 n_i 个同余类子集各一个元素. 故知集合 N 中模 p_i 的 “ ti 同余类子集” 的基数为

$$|N_{ti}(\bmod p_i)| = \left[\frac{n}{p_i} \right] + Q_{ti} \quad (44)$$

$$Q_{ti} = 0 \quad (ti = 0 \text{ 或 } ti > n_i)$$

$$Q_{ti} = 1 \quad (1 \leq ti \leq n_i)$$

将 (43) 代入 (44) 式得

$$|N_{ti}(\bmod p_i)| = \frac{n}{p_i} + Q_{ti} - \frac{n_i}{p_i} \quad (45)$$

$$Q_{ti} = 0 \quad (ti = 0 \text{ 或 } ti > n_i)$$

$$Q_{ti} = 1 \quad (1 \leq ti \leq n_i)$$

$$\text{令 } R_{ti} = Q_{ti} - \frac{n_i}{p_i} \quad (46)$$

$$|N_{ti}(\bmod p_i)| = \frac{n}{p_i} + R_{ti} \quad (47)$$

$$\text{由于 } \frac{n_i}{p_i} < 1 \quad (48)$$

故知

$$R_{ti} = 0 \quad (n_i = 0) \quad (49)$$

$$-1 < R_{ti} < 1 \quad (n_i \neq 0) \quad (50)$$

通常都有 $n \gg p_i$ ，相比之下，(47) 式右端第二项 R_{ti} 可以略去，故得下面的近似式：

$$\begin{aligned} |N_{si}(\bmod p_i)| &= |N_{ti}(\bmod p_i)| = \frac{n}{p_i} \quad (ti = 0, 1, \dots, p_i - 1) \\ &\quad (i = 1, 2, \dots, r) \end{aligned} \quad (51)$$

我们知道，对同一模数的各同余类子集相互之间的交集皆为空集，所以

$$\begin{aligned} |\bigcup_{Si=1}^{\alpha i} N_{Si}(\bmod p_i)| &= \sum_{Si=1}^{\alpha i} |N_{Si}(\bmod p_i)| = \\ \alpha_i \left(\frac{n}{p_i} \right) &= nk_i \quad (i = 1, 2, \dots, r) \end{aligned} \quad (52)$$

$$\text{式中,} \quad k_i = \frac{\alpha_i}{p_i} \quad (i = 1, 2, \dots, r) \quad (53)$$

由 (52) 式得

$$k_i = \left| \bigcup_{Si=1}^{\alpha i} N_{Si}(\bmod p_i) \right| \left(\frac{1}{n} \right) \quad (54)$$

由 (54) 式知， k_i 表示集合 N 按模 p_i 所选取的 α_i 个模 p_i 的同余类子集中的元素个数与集合 N 中全部元素个数的比率，故 k_i 称为按模 p_i 筛选的“分选系数”。

照前面确定的定义 $N_{s1}(\bmod p_1)$ 表示集合 N 中被选取的 $s1$ 号模 p_1 的同余类子集。显然，该同余类子集 $N_{s1}(\bmod p_1)$ 为“正整数等差数列集合”，其公差 $\Delta = p_1$ 。若以 p_2 为模数，模数 p_2 则与“正整数等差数列集合” $N_{s1}(\bmod p_1)$ 的公差 p_1 互素。根据正整数等差数列集合的基本特征同上推理可知， $N_{s1}(\bmod p_1)$ 中 $s2$ 号模 p_2 的同余类子集的基数应为

$$\begin{aligned}
& |\{N_{s_1}(\bmod p_1)\}_{s_2}(\bmod p_2)| = \\
& |N_{s_1}(\bmod p_1) \cap N_{s_2}(\bmod p_2)| = \\
& |N_{s_1}(\bmod p_1)| \left(\frac{1}{p_2}\right) = \frac{n}{p_1 p_2} \quad (55)
\end{aligned}$$

集合 $N_{s_1}(\bmod p_1)$ 中随意 α_2 个模 p_2 的同余类子集的基数应为

$$\begin{aligned}
& \left| \bigcup_{s_2=1}^{\alpha_2} \{N_{s_1}(\bmod p_1)\}_{s_2}(\bmod p_2) \right| = \\
& |N_{s_1}(\bmod p_1) \cap \bigcup_{s_2=1}^{\alpha_2} N_{s_2}(\bmod p_2)| = \\
& \left| \bigcup_{s_2=1}^{\alpha_2} \{N_{s_1}(\bmod p_1) \cap N_{s_2}(\bmod p_2)\} \right| = \\
& \sum_{s_2=1}^{\alpha_2} |N_{s_1}(\bmod p_1) \cap N_{s_2}(\bmod p_2)| = \\
& \alpha_2 \left(\frac{n}{p_1 p_2}\right) \quad (56)
\end{aligned}$$

对于多个模 p_1 的同余类子集而言, 则有

$$\begin{aligned}
& \left| \bigcup_{s_1=1}^{\alpha_1} N_{s_1}(\bmod p_1) \cap \bigcup_{s_2=1}^{\alpha_2} N_{s_2}(\bmod p_2) \right| = \\
& \left| \bigcup_{s_1=1}^{\alpha_1} \{N_{s_1}(\bmod p_1) \cap \bigcup_{s_2=1}^{\alpha_2} N_{s_2}(\bmod p_2)\} \right| = \\
& \sum_{s_1=1}^{\alpha_1} |N_{s_1}(\bmod p_1) \cap \bigcup_{s_2=1}^{\alpha_2} N_{s_2}(\bmod p_2)| = \\
& \alpha_1 \alpha_2 \left(\frac{n}{p_1 p_2}\right) = n k_1 k_2 \quad (57)
\end{aligned}$$

由于 $N_{s_1}(\bmod p_1) \cap N_{s_2}(\bmod p_2)$ 仍为“正整数等差数列集”，其公差 $\Delta = p_1 p_2$ 。若以 p_3 为模数，模数 p_3 则与“正整数等差数列集” $N_{s_1}(\bmod p_1) \cap N_{s_2}(\bmod p_2)$ 的公差 $p_1 p_2$ 互素。根据正整数等差数列集合的基本特征同上推理可得

$$|\bigcap_{i=1}^3 \bigcup_{s_i=1}^{\alpha_i} N_{s_i}(\bmod p_i)| = nk_1 k_2 k_3 \quad (58)$$

依次类推，即得

$$|\bigcap_{i=1}^r \bigcup_{s_i=1}^{\alpha_i} N_{s_i}(\bmod p_i)| = n \prod_{i=1}^r k_i \quad (59)$$

将 (59) 代入 (42) 式得

$$|N_B| = n \prod_{i=1}^r k_i \quad (60)$$

由 (53) 和 (60) 式可知

$$|N_B| = n \prod_{i=1}^r \left(\frac{\alpha_i}{p_i} \right) \quad (61)$$

(61) 式即为所求自然数列的通用筛函数近似估算式，式中 α_i 为按照筛选条件所选取的模 p_i 的同余类子集的个数。这里被筛掉的可以是“零同余类子集”，也可以是其它同余类子集，可以是一个同余类子集，也可以是若干个同余类子集都不受限制，且不论被筛掉的同余类子集所对应的具体余数如何皆可适用，故称为通用筛函数。

1.5 通用筛函数的下界

在前节推导筛函数的过程中略去了 (47) 式右端的误差项 R_{ii} ，这可能会带来筛函数近似估算式的双向偏差。当需要知道

筛函数确切的上、下边界数值时,显然单有筛函数近似估算式是不能满足要求的,必须对其边界值的具体情况予以讨论。

关于筛函数的下界问题:

对于任一命题,当被筛集合 N 确定之后,其基数 n 为一常数。由 (60) 式可知,筛函数 $|N_B|$ 为 $k_i (i=1,2,\dots,r)$ 的多变量函数,对 (60) 式所示函数求偏导数可得:

$$\frac{\partial |N_B|}{\partial k_j} = \left(\frac{n}{k_j}\right) \prod_{i=1}^r k_i \quad j=1,2,\dots,r \quad (62)$$

$$\text{由于} \quad k_i > 0 \quad (i=1,2,\dots,r) \quad (63)$$

$$\text{故} \quad \frac{\partial |N_B|}{\partial k_j} > 0 \quad j=1,2,\dots,r \quad (64)$$

可见,筛函数 $|N_B|$ 对每一个变量 $k_i (i=1,2,\dots,r)$ 皆为递增函数。由此可知,筛函数 $|N_B|$ 的下界应该与诸变量 $k_i (i=1,2,\dots,r)$ 的下界相对应。若以 k_i^* 表示变量 k_i 的下界函数,则筛函数的下界表达式应为:

$$|N_B| > n \prod_{i=1}^r k_i^* \quad (65)$$

由 (44) 式可知,集合 N 中任取一个模 p_i 的同余类子集,其基数都满足如下不等式:

$$|N_{si}(\text{mod } p_i)| \geq \left[\frac{n}{p_i}\right] \quad (66)$$

将 (43) 代入 (66) 式得,

$$|N_{si}(\text{mod } p_i)| \geq \frac{n}{p_i} - \frac{n_i}{p_i} > \frac{n}{p_i} - \frac{p_i}{p_i} = \frac{n-p_i}{p_i} \quad (67)$$

集合 N 中随意 α 个模 p_i 的同余类子集的并集基数则为:

$$|\bigcup_{si=1}^{\alpha_i} N_{si}(\bmod p_i)| = \sum_{si=1}^{\alpha_i} |N_{si}(\bmod p_i)| > \frac{\alpha_i(n-p_i)}{p_i} = n\left(\frac{\alpha_i}{p_i}\right)\left(\frac{n-p_i}{n}\right) \quad (68)$$

将 (68) 式代入 (54) 式得

$$k_i > \left(\frac{n-p_i}{n}\right)\left(\frac{\alpha_i}{p_i}\right) \quad (69)$$

(69) 式右端即为 k_i 的下界函数，前已述及 k_i 的下界函数用 k_i^* 表示，故得：

$$k_i^* = \left(\frac{n-p_i}{n}\right)\left(\frac{\alpha_i}{p_i}\right) \quad (70)$$

$$k_i > k_i^* \quad (71)$$

将 (70) 代入 (65) 式即得筛函数的下界表达式：

$$|N_B| > n \prod_{i=1}^r \left(\frac{n-p_i}{n}\right)\left(\frac{\alpha_i}{p_i}\right) \quad (72)$$

(72) 式用于筛函数的下界计算，式中 α_i 为按照筛选条件所选取的模 p_i 的同余类子集的个数。

1.6 预备定理

在筛法应用于实际问题的求证过程中，当得到筛函数的下界表达式之后还需要对其进行运算处理。另外，对于筛选后所获得的元素也需要给予论述说明。因此，将会涉及到如下有关定理，这里给以论证。

1.6.1 素数判别问题

设 A 为任意正整数，将不超过 A 的全部正整数集合用 E 表示。 $E = (1, 2, \dots, A)$

以埃氏 (Eratosthenes) 筛法求得不超过 $A^{1/2}$ 的全部素数集合 P , 并将集合 P 中元素按数值大小顺序排列如下:

$$P = (p_1, p_2, \dots, p_r)$$

$$2 = p_1 < p_2 < \dots < p_r \leq A^{1/2}$$

给出众所周知的引理。

引理 1: 大于 1 的正整数的约数中, 1 以外的最小约数为素数。

引理 2: 任一复合数 b 的不为 1 的最小约数 (按引理 1, 应是素数) 不超过 $b^{1/2}$ 。

已知, 集合 E 中所有元素都不超过 A 。根据引理 1 和引理 2, 则集合 E 中所有复合数的最小素因子必然属于集合 P 。由此推得:

引理 3: 集合 E 中大于 1 的各元素, 凡不能被集合 P 中任何一个元素整除者必为奇素数。

证: 设 u 为集合 E 中大于 1 的某元素, u 不能被集合 P 中任何一个元素整除。

2 为集合 P 中最小的元素, 根据前面设定条件 u 不能被 2 整除, 所以 u 为奇数。假若 u 不为奇素数, 则必为复合数。 u 为复合数就必定能被它自身的最小素因子整除, 而它自身的最小素因子就是集合 P 中的一个元素, 由此推得, u 能被集合 P 中的一个元素整除。这与设定的前题条件相矛盾, 故引理得证。

1.6.2 素数分布问题

关于素数分布问题, 实际上至今、还没有一个精确描述全体素数分布的公式, Legendre 给出的渐近公式

$$\Pi(x) \cong \frac{x}{\ln x - 1.08366}, \quad x \rightarrow +\infty \quad (73)$$

和 J.Hadamard 证明的素数定理

$$\Pi(x) \cong \frac{x}{\ln x}, \quad x \rightarrow +\infty \quad (74)$$

都是大数值时的极限公式，当 $x \rightarrow +\infty$ 时，二者是完全等价的，只是在变量 x 的有限区间存在着较大的差异。

经验算证明，在有限区间内 (73) 式的计算结果偏差远小于 (74) 式（见附表）。所以，从实用角度来看，(73) 式应该更为适用，因为在有限区间内它能给出更为精确的运算结果，在极限情况下又能满足 (74) 式的极限值。

将 (73) 式的函数形式作以变换：

$$\begin{aligned} \Pi(x) &\cong \frac{x}{\ln x - 1.08366} = \\ &\left(\frac{\ln x}{\ln x - 1.08366} \right) \left(\frac{x}{\ln x} \right) = \left(1 + \frac{1.08366}{\ln(0.3383x)} \right) \left(\frac{x}{\ln x} \right) \end{aligned} \quad (75)$$

$$\text{令} \quad \eta = 1 + \frac{1.08366}{\ln(0.3383x)} \quad (76)$$

$$\text{得} \quad \Pi(x) \cong \eta \left(\frac{x}{\ln x} \right) \quad (77)$$

由 (76) 式可以求得

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{-1.08366}{x \ln^2(0.3383x)} < 0 \quad (78)$$

(78) 式表明， η 为 x 的递减函数，而且，当 $x=100$ 时， η 值小于 2，即有

$$\eta(x=100) \cong 1.308 < 2 \quad (79)$$

$$\text{由(78)式和(79)式可知} \quad \eta < 2 \quad (x > 100) \quad (80)$$

将 (80) 式代入 (77) 式可得

$$\Pi(x) < 2 \left(\frac{x}{\ln x} \right) \quad (x > 100) \quad (81)$$

$\Pi(x)$ 表示不超过 x 的素数的个数, 上述 (77) 式为其近似计算公式, (81) 式为其上界公式。

必要指出的是 (81) 式只在 $x > 100$ 的大数值区域适用, 比 (81) 式更有普遍适用性的上界公式则为切比晓夫不等式:

$$\Pi(x) < (6 \ln 2) \left(\frac{x}{\ln x} \right), \quad x \geq 2 \quad (82)$$

显然, 在小数值范围内选用 (82) 式比较适宜, 在大数值范围内 (81) 式和 (82) 式可随意选用。

另外, 作者通过验算确定了下面的近似计算公式:

$$\Pi(x) \cong \left(1 + \frac{0.4649}{\log_{10}(0.3023x)} \right) \left(\frac{x}{\ln x} \right) \quad (83)$$

(83) 式计算结果的平均偏差比 (73) 式略有改进 (见表 1-1), 尤其在数值较大的区域值得参考使用。

表 1-1 $\Pi(x)$ 三种公式的验算数据

$$\text{公式 1: } \Pi(x) = \frac{x}{\ln x}$$

$$\text{公式 2: } \Pi(x) = \frac{x}{\ln x - 1.08366}$$

$$\text{公式 3: } \Pi(x) = \left(1 + \frac{0.4649}{\log_{10} 0.3023x} \right) \frac{x}{\ln x}$$

X 值 $\times 10^4$	$\Pi(x)$ 实筛值	公式 1		公式 2		公式 3	
		计算数	偏差	计算数	偏差	计算数	偏差
1	1229	1085	-144	1230	1	1230	1
5	5133	4621	-512	5135	2	5135	2
10	9592	8685	-907	9588	-4	9586	-6
15	13848	12585	-1263	13844	-4	13841	-7
20	17984	16385	-1599	17981	-3	17978	-6

续表

X 值 $\times 10^4$	$\Pi(x)$ 实筛值	公式 1		公式 2		公式 3	
		计算数	偏差	计算数	偏差	计算数	偏差
25	22044	20114	-1930	22035	-9	22030	-14
30	25997	23787	-2210	26023	26	26017	20
35	29977	27417	-2560	29960	-17	29953	-24
40	33860	31009	-2851	33853	-7	33845	-15
45	37706	34570	-3136	37709	3	37700	-6
50	41538	38102	-3436	41532	-6	41522	-16
55	45322	41610	-3712	45326	4	45315	-7
60	49098	45096	-4002	49095	-3	49082	-16
65	52831	48562	-4269	52840	9	52827	-4
70	56543	52010	-4533	56564	21	56550	7
75	60238	55440	-4798	60268	30	60252	14
80	63951	58856	-5095	63955	4	63938	-13
85	67617	62257	-5360	67624	7	67607	-10
90	71274	65645	-5629	71279	5	71260	-14
95	74907	69019	-5888	74917	10	74897	-10
100	78498	72382	-6116	78542	44	78522	24
105	82134	75733	-6401	82155	21	82132	-2
110	85714	79074	-6640	85755	41	85731	17
115	89302	82405	-6897	89343	41	89318	16
120	92938	85727	-7211	92920	-18	92895	-43
125	96469	89039	-7430	96487	18	96461	-8
130	100021	92343	-7678	100045	24	100016	-5
135	103544	95639	-7905	103591	47	103563	19
140	107126	98926	-8200	107129	3	107099	-27
145	110630	102204	-8426	110657	27	110625	-5
150	114155	105477	-8678	114178	23	114146	-9
155	117663	108743	-8920	117691	28	117658	-5

续表

X 值 $\times 10^4$	$\Pi(x)$ 实筛值	公式 1		公式 2		公式 3	
		计算数	偏差	计算数	偏差	计算数	偏差
160	121127	112001	-9126	121195	68	121161	34
165	124634	115252	-9382	124691	57	124655	21
170	128141	118499	-9642	128181	40	128145	4
175	131608	121738	-9870	131663	55	131626	18
180	135072	124970	-10102	135137	65	135099	27
185	138542	128198	-10344	138606	64	138567	25
190	142029	131419	-10610	142068	39	142027	-2
195	145502	134637	-10865	145526	24	145484	-18
200	148933	137849	-11084	148976	43	148933	0
205	152382	141053	-11329	152418	36	152374	-8
210	155805	144256	-11549	155858	53	155813	8
215	159250	147452	-11798	159291	41	159246	-4
220	162662	150644	-12018	162718	56	162671	9
225	166081	153830	-12251	166139	58	166091	10
230	169511	157013	-12498	169557	46	169508	-3
235	172873	160190	-12683	172967	94	172917	44
240	176302	163365	-12937	176375	73	176324	22
245	179684	166534	-13150	179776	92	179724	40
250	183072	169701	-13371	183175	103	183122	50
255	186462	172863	-13599	186568	106	186514	52
260	189880	176019	-13861	189954	74	189899	19
265	193256	179175	-14081	193341	85	193284	28
270	196645	182323	-14322	196718	73	196660	15
275	199993	185471	-14522	200095	102	200037	44
280	203362	188612	-14750	203464	102	203405	43
285	206789	191754	-15035	206835	46	206774	-15
290	210109	194889	-15220	210196	87	210135	26

续表

X 值 $\times 10^4$	$\Pi(x)$ 实筛值	公式 1		公式 2		公式 3	
		计算数	偏差	计算数	偏差	计算数	偏差
295	213453	198022	-15431	213557	104	213494	41
300	216816	201151	-15665	216912	96	216848	32
305	220136	204277	-15859	220263	127	220199	63
310	223492	207399	-16093	223610	118	223545	53
315	226835	210520	-16315	226957	122	226890	55
320	230209	213638	-16571	230300	91	230231	22
325	233577	216749	-16828	233635	58	233566	-11
330	236900	219861	-17039	236970	70	236900	0
335	240230	222970	-17260	240302	72	240231	1
340	243539	226073	-17466	243627	88	243556	17
345	246909	229176	-17733	246954	45	246881	-28
350	250150	232274	-17876	250273	123	250198	48
355	253412	235373	-18039	253593	181	253518	106
360	256726	238466	-18260	256907	181	256831	105
365	260064	241557	-18507	260219	155	260142	78
370	263397	244646	-18751	263528	131	263450	53
375	266717	247733	-18984	266893	176	266756	39
380	269987	250815	-19172	270137	150	270056	69
385	273322	253895	-19427	273436	114	273354	32
390	276611	256974	-19637	276734	123	276651	40
395	279921	260052	-19869	280030	109	279946	25
400	283146	263124	-20022	283320	174	283236	90
405	286490	266195	-20295	286609	119	286524	34
410	289774	269266	-20508	289897	123	289811	37
415	293010	272335	-20675	2931852	175	293096	86
420	296314	275400	-20914	296466	152	296377	63
425	299583	278460	-21123	299742	159	299652	69

续表

X 值 $\times 10^4$	$\Pi(x)$ 实筛值	公式 1		公式 2		公式 3	
		计算数	偏差	计算数	偏差	计算数	偏差
430	302824	281519	-21305	303018	194	302927	103
435	306084	284578	-21506	306293	209	306200	116
440	309335	287633	-21702	309562	227	309469	134
445	312666	290687	-21979	312832	166	312737	71
450	315948	293741	-22207	316101	153	316006	58
455	319164	296791	-22373	319365	201	319269	105
460	322441	299836	-22605	322625	184	322527	86
465	325706	302881	-22825	325884	178	325786	80
470	328964	305927	-23037	329144	180	329044	80
475	332219	308969	-23250	332399	180	332299	80
480	335439	312011	-23428	335654	215	335552	113
485	338694	315049	-23645	338905	211	338802	108
490	341992	318082	-23910	342151	159	342047	55
495	345235	321117	-24118	345398	163	345293	58
500	348513	324148	-24365	348641	128	348535	22

第二章 哥德巴赫猜想

关于偶数的哥德巴赫猜想系指不小于 6 的任意偶数, 猜想可表为二个奇素数之和。在小数值范围内, 这一命题已被逐一验算确认, 困难的只是任意大偶数能否表为二个奇素数之和的问题, 至今尚未得到公认求证。下文就此问题做以讨论。

2.1 求解证明

设 A 为大于 100000 的任意大偶数, 将不超过 A 的全部正整数集合用 E 表示, 则集合 E 的基数 $|E|$ 等于 A 。

$$|E| = A \quad (1)$$

以埃氏 (Eratosthenes) 筛法求得不超过 $A^{1/2}$ 的全部素数集合 P , 并将集合 P 中元素按数值大小顺序排列如下, $P = (p_1, p_2, \dots, p_r)$

$$2 = p_1 < p_2 < \dots < p_r \leq A^{1/2} \quad (2)$$

$$A \text{ 为偶数, 必可用下式表述 } A = 2n \quad (n \text{ 为正整数}) \quad (3)$$

将不超过 n 的全部正整数集合用 N 表示, 则集合 N 的基数 $|N|$ 等于 n 。

$$|N| = n \quad (4)$$

以集合 P 中各元素为模数, 求得同余式组,

$$A \equiv A_i \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$n \equiv n_i \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

其中, A_i 和 n_i 为非负的最小剩余 (以下类同)。

用筛选方法从集合 N 中分选出必要的子集。

给定筛选条件:

$$g \not\equiv n_i \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (5)$$

$$g \not\equiv p_i - n_i \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (6)$$

g 表示集合 N 中被选元素

从集合 N 中, 将同时符合 (5) 和 (6) 式条件的元素分选出来, 组成子集 N_B , 再来讨论子集 N_B 的基数 $|N_B|$ (筛函数)。

2.1.1 求证筛函数的下界

集合 N 为自然数列, 模数集合 P 中的元素为互不相同的素数, 根据第一章中给出的相关公式 (61) 式可知, 基数 $|N_B|$ 的近似估算公式为

$$|N_B| = n \prod_{i=1}^r \left(\frac{\alpha_i}{p_i} \right) \quad (7)$$

根据第一章中 (72) 式可知, 基数 $|N_B|$ 的下界计算公式为

$$|N_B| > n \prod_{i=1}^r \left(\frac{n - p_i}{n} \right) \left(\frac{\alpha_i}{p_i} \right) \quad (8)$$

式中 α_i 为按照筛选条件所选取的模 p_i 的同余类子集的个数。下面具体分析确定 α_i 的数值:

当 $i=1$ 时, 筛选条件即为

$$g \not\equiv n_1 \pmod{p_1} \quad (9)$$

$$g \not\equiv p_1 - n_1 \pmod{p_1} \quad (10)$$

由于 $p_1 = 2$, $n_1 = 0$ 或 $n_1 = 1$, 都有

$$p_1 - n_1 \equiv n_1 \pmod{p_1}$$

所以, (9) 和 (10) 式完全等价, 仅需考虑其中之一即可。

按照 (9) 式可知, 集合 N 中模 p_1 的 “ n_1 同余类子集” 不符合被选条件, 应当筛掉, 剩下的另外一个模 p_1 的同余类子集则符合被选条件, 应被选取, 故知

$$\alpha_1 = 1 \quad (11)$$

当 $i > 1$ 且 $n_i = 0$ 时, 筛选条件即为

$$g \not\equiv 0 \pmod{p_i}, \quad i = 2, 3, \dots, r \quad (12)$$

$$g \not\equiv p_i \pmod{p_i}, \quad i = 2, 3, \dots, r \quad (13)$$

显然, 上述两个条件是完全等价的, 只需考虑其中之一即可, 按照 (12) 式可知, 只有模 p_i 的“0 同余类子集”不符合被选条件, 模 p_i 的其余 $(p_i - 1)$ 个同余类子集都能符合被选条件应被选取, 故知,

$$\alpha_i = p_i - 1 \quad (n_i = 0, i > 1) \quad (14)$$

当 $i > 1$ 且 $n_i \neq 0$ 时, 筛选条件 (5) 和 (6) 式为两个不同的条件, 由二者可知, 集合 N 中模 p_i 的“ n_i 同余类子集”和“ $(p_i - n_i)$ 同余类子集”都不符合被选条件, 应当筛掉, 而其余 $(p_i - 2)$ 个模 p_i 的同余类子集都符合被选条件, 应被选取, 故知

$$\alpha_i = p_i - 2 \quad (n_i \neq 0, i > 1) \quad (15)$$

将 (14) 式和 (15) 式合并可得

$$\alpha_i = p_i - 2^{\tilde{\alpha}} \quad (i > 1) \quad (16)$$

$$\tilde{\alpha} = 0 \quad (n_i = 0), \quad \tilde{\alpha} = 1 \quad (n_i \neq 0)$$

将 (11) 式和 (16) 式代入 (7) 式得

$$|N_B| = \left(\frac{n}{2}\right) \prod_{i=2}^r \left(\frac{p_i - 2^{\tilde{\alpha}}}{p_i}\right) \quad (17)$$

$$\tilde{\alpha} = 0 \quad (n_i = 0), \quad \tilde{\alpha} = 1 \quad (n_i \neq 0)$$

将 (11) 式和 (16) 式代入 (8) 式得

$$|N_B| > F_1 \left(\frac{n}{2}\right) \prod_{i=2}^r \left(\frac{p_i - 2^{\tilde{\alpha}}}{p_i}\right) \quad (18)$$

$$\delta i = 0 \quad (n_i = 0), \quad \delta i = 1 \quad (n_i \neq 0)$$

$$F_1 = \prod_{i=1}^r \{1 - (\frac{p_i}{n})\} > 1 - (\frac{1}{n}) \sum_{i=1}^r p_i \quad (19)$$

由于 $F_1 > 0$ ，根据第一章 (64) 式，可将 (18) 式改写为

$$|N_B| > F_1 \left(\frac{n}{2}\right) \prod_{i=2}^r \left(\frac{p_i - 2}{p_i}\right) \quad (20)$$

由第一章 (77) 式可推得

$$\Pi(x) - \Pi\left(\frac{x}{2}\right) < \Pi\left(\frac{x}{2}\right) \quad (21)$$

由 (21) 式可知，数值越大的区域素数分布的密度越小。故得

$$\sum_{i=1}^r p_i < \left(\frac{1}{2}\right)(p_1 + p_r) \Pi(p_r) \quad (22)$$

根据第一章 (82) 式可得

$$\Pi(p_r) < 6 \ln 2 \left(\frac{p_r}{\ln p_r}\right) \quad (23)$$

将 (23) 式代入 (22) 式

$$\sum_{i=1}^r p_i < \frac{(3 \ln 2)(p_1 + p_r)p_r}{\ln p_r} \quad (24)$$

将 (24) 式代入 (19) 式

$$F_1 > 1 - \frac{(3 \ln 2)(p_1 + p_r)p_r}{n \ln p_r} \quad (25)$$

将 (25) 式代入 (20) 式得

$$|N_B| > \left\{ \frac{n}{2} - \frac{(3 \ln 2)(p_1 + p_r)p_r}{2 \ln p_r} \right\} \prod_{i=2}^r \left(\frac{p_i - 2}{p_i}\right) \quad (26)$$

将 $(n/2)$ 作以下变换：

$$n/2 = (n/2)\{p_2/(p_3 - 2)\} \quad (27)$$

$$n/2 = (n/2)\{p_3/(p_4 - 2)\} \quad (28)$$

$$n/2 = (n/2)\{p_4/(p_5 - 2)\} + n/(p_5 - 2) \quad (29)$$

$$n/2 = (n/2)\{p_5/(p_6 - 2)\} \quad (30)$$

$$n/2 = (n/2)\{p_6/(p_7 - 2)\} + n/(p_7 - 2) \quad (31)$$

$$n/2 = (n/2)\{p_7/(p_8 - 2)\} \quad (32)$$

$$n/2 = (n/2)\{p_8/(p_9 - 2)\} + n/(p_9 - 2) \quad (33)$$

$$n/2 = (n/2)\{p_9/(p_{10} - 2)\} + 2n/(p_{10} - 2) \quad (34)$$

$$n/2 = (n/2)\{p_{10}/(p_{11} - 2)\} \quad (35)$$

$$n/2 = (n/2)\{p_{11}/(p_{12} - 2)\} + 2n/(p_{12} - 2) \quad (36)$$

$$n/2 = (n/2)\{p_{12}/(p_{13} - 2)\} + n/(p_{13} - 2) \quad (37)$$

$$n/2 = (n/2)\{p_{13}/(p_{14} - 2)\} \quad (38)$$

$$n/2 = (n/2)\{p_{14}/(p_{15} - 2)\} + n/(p_{15} - 2) \quad (39)$$

$$n/2 = (n/2)\{p_{15}/(p_{16} - 2)\} + 2n/(p_{16} - 2) \quad (40)$$

$$n/2 = (n/2)\{p_{16}/(p_{17} - 2)\} + 2n/(p_{17} - 2) \quad (41)$$

$$n/2 = (n/2)\{p_{17}/(p_{18} - 2)\} \quad (42)$$

$$n/2 = (n/2)\{p_{18}/(p_{19} - 2)\} + 2n/(p_{19} - 2) \quad (43)$$

$$n/2 = (n/2)\{p_{19}/(p_{20} - 2)\} + n/(p_{20} - 2) \quad (44)$$

$$n/2 = (n/2)\{p_{20}/(p_{21} - 2)\} \quad (45)$$

$$n/2 = (n/2)\{p_{21}/(p_{22} - 2)\} + 2n/(p_{22} - 2) \quad (46)$$

$$n/2 = (n/2)\{p_{22}/(p_{23} - 2)\} + n/(p_{23} - 2) \quad (47)$$

$$n/2 = (n/2)\{p_{23}/(p_{24} - 2)\} + 2n/(p_{24} - 2) \quad (48)$$

$$n/2 = (n/2)\{p_{24}/(p_{25} - 2)\} + 3n/(p_{25} - 2) \quad (49)$$

$$n/2 = (n/2)\{p_{25}/(p_{26}-2)\} + n/(p_{26}-2) \quad (50)$$

$$n/2 = (n/2)\{p_{26}/(p_{27}-2)\} \quad (51)$$

$$n/2 = (n/2)\{p_{27}/(p_{28}-2)\} + n/(p_{28}-2) \quad (52)$$

$$n/2 = (n/2)\{p_{28}/(p_{29}-2)\} \quad (53)$$

$$n/2 = (n/2)\{p_{29}/(p_{30}-2)\} + n/(p_{30}-2) \quad (54)$$

$$n/2 = (n/2)\{p_{30}/(p_{31}-2)\} + 6n/(p_{31}-2) \quad (55)$$

$$n/2 = (n/2)\{p_{31}/(p_{32}-2)\} + n/(p_{32}-2) \quad (56)$$

$$n/2 = (n/2)\{p_{32}/(p_{33}-2)\} + 2n/(p_{33}-2) \quad (57)$$

$$n/2 = (n/2)\{p_{33}/(p_{34}-2)\} \quad (58)$$

$$n/2 = (n/2)\{p_{34}/(p_{35}-2)\} + 4n/(p_{35}-2) \quad (59)$$

$$n/2 = (n/2)\{p_{35}/(p_{36}-2)\} \quad (60)$$

$$n/2 = (n/2)\{p_{36}/(p_{37}-2)\} + 2n/(p_{37}-2) \quad (61)$$

$$n/2 = (n/2)\{p_{37}/(p_{38}-2)\} + 2n/(p_{38}-2) \quad (62)$$

将 (27) ~ (62) 式逐次代入, 可得

$$\frac{n}{2} = \left(\frac{n}{2}\right) \prod_{i=3}^{38} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right) + F_2 \quad (63)$$

$$\begin{aligned} F_2 &= \left(\frac{n}{p_5-2}\right) \prod_{i=6}^{38} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right) + \left(\frac{n}{p_7-2}\right) \prod_{i=8}^{38} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right) + \\ &\left(\frac{n}{p_9-2}\right) \prod_{i=10}^{38} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right) + \left(\frac{2n}{p_{10}-2}\right) \prod_{i=11}^{38} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right) + \\ &\left(\frac{2n}{p_{12}-2}\right) \prod_{i=13}^{38} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right) + \left(\frac{n}{p_{13}-2}\right) \prod_{i=14}^{38} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right) + \\ &\left(\frac{n}{p_{15}-2}\right) \prod_{i=16}^{38} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right) + \left(\frac{2n}{p_{16}-2}\right) \prod_{i=17}^{38} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{2n}{p_{17}-2}\right)\prod_{i=18}^{38}\left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right) + \left(\frac{2n}{p_{19}-2}\right)\prod_{i=20}^{38}\left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right) + \\
& \left(\frac{n}{p_{20}-2}\right)\prod_{i=21}^{38}\left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right) + \left(\frac{2n}{p_{22}-2}\right)\prod_{i=23}^{38}\left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right) + \\
& \left(\frac{n}{p_{23}-2}\right)\prod_{i=24}^{38}\left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right) + \left(\frac{2n}{p_{24}-2}\right)\prod_{i=25}^{38}\left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right) + \\
& \left(\frac{3n}{p_{25}-2}\right)\prod_{i=26}^{38}\left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right) + \left(\frac{n}{p_{26}-2}\right)\prod_{i=27}^{38}\left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right) + \\
& \left(\frac{n}{p_{28}-2}\right)\prod_{i=29}^{38}\left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right) + \left(\frac{n}{p_{30}-2}\right)\prod_{i=31}^{38}\left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right) + \\
& \left(\frac{6n}{p_{31}-2}\right)\prod_{i=32}^{38}\left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right) + \left(\frac{n}{p_{32}-2}\right)\prod_{i=33}^{38}\left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right) + \\
& \left(\frac{2n}{p_{33}-2}\right)\prod_{i=34}^{38}\left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right) + \left(\frac{4n}{p_{35}-2}\right)\prod_{i=36}^{38}\left\{\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right\} + \\
& \left(\frac{2n}{p_{37}-2}\right)\left(\frac{p_{37}}{p_{38}-2}\right) + \left(\frac{2n}{p_{38}-2}\right) \tag{64}
\end{aligned}$$

将 $p_5=11$, $p_6=13$, $p_7=17$, $p_8=19$, $p_9=23$, $p_{10}=29$,
 $p_{11}=31$, $p_{12}=37$, $p_{13}=41$, $p_{14}=43$, $p_{15}=47$, $p_{16}=53$,
 $p_{17}=59$, $p_{18}=61$, $p_{19}=67$, $p_{20}=71$, $p_{21}=73$, $p_{22}=79$,
 $p_{23}=83$, $p_{24}=89$, $p_{25}=97$, $p_{26}=101$, $p_{27}=103$, $p_{28}=107$,
 $p_{29}=109$, $p_{30}=113$, $p_{31}=127$, $p_{32}=131$, $p_{33}=137$,
 $p_{34}=139$, $p_{35}=149$, $p_{36}=151$, $p_{37}=157$, $p_{38}=163$ 代入 (64)
 式, 得

$$F_2 = 0.40145n \tag{65}$$

将 (65) 式代入 (63) 式得

$$\frac{n}{2} = \left(\frac{n}{2}\right) \prod_{i=3}^{38} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i - 2}\right) + 0.40145n \quad (66)$$

将 (66) 式代入 (26) 式得

$$|N_B| > \left(\frac{n}{2}\right) \prod_{j=3}^{38} \left(\frac{p_{j-1}}{p_j - 2}\right) \prod_{i=2}^r \left(\frac{p_i - 2}{p_i}\right) + F_3 \quad (67)$$

$$F_3 = \{0.40145n - \frac{(3\ln 2)(p_1 + p_r)p_r}{2\ln p_r}\} \prod_{i=2}^r \left(\frac{p_i - 2}{p_i}\right) \quad (68)$$

$$\text{由(2)和(3)式知, } n \geq \frac{p_r^2}{2} \quad (69)$$

由 (69), (68) 式可知

$$F_3 \geq F_4 p_r \prod_{i=2}^r \left(\frac{p_i - 2}{p_i}\right) \quad (70)$$

$$F_4 = \left(\frac{0.40145p_r}{2}\right) - \frac{(3\ln 2)(p_1 + p_r)}{2\ln p_r} \quad (71)$$

$$\frac{dF_4}{dp_r} = 0.2007 - 1.0397 \left\{ \frac{\ln p_r - (p_1 + p_r)(1/p_r)}{\ln^2 p_r} \right\} =$$

$$0.2007 - \frac{1.0397}{\ln p_r} + \frac{1.0397(p_1 + p_r)}{p_r \ln^2 p_r} > 0.2007 - \frac{1.0397}{\ln p_r} \quad (72)$$

$$\text{命 } 0.2007 - \frac{1.0397}{\ln p_r} > 0$$

$$\text{得 } p_r > e^{5.18} = 178 \quad (73)$$

将条件 (73) 式代入 (72) 式即得

$$\frac{dF_4}{dp_r} > 0 \quad (p_r > 178) \quad (74)$$

由(74)式可知, 当 $p_r > 178$ 时, F_4 为 p_r 的增值函数。

当 $A \geq 100\,000$ 时, $p_r \geq 313 > 178$

且当 $p_r = 313$ 时, $F_4 = 5.8 > 1$

$$\text{故知, } F_4 > 1 \quad (A \geq 100\,000) \quad (75)$$

将(75)式代入(70)式得:

$$F_3 > p_r \prod_{i=2}^r \left(\frac{p_i - 2}{p_i} \right) = \frac{p_r}{3} \prod_{i=3}^r \left(\frac{p_i - 2}{p_i} \right) \quad (76)$$

$$\text{由于 } p_i - 2 \geq p_{i-1} \quad (i \geq 3) \quad (77)$$

$$\text{故知 } F_3 > \left(\frac{p_r}{3} \right) \prod_{i=3}^r \left(\frac{p_{i-1}}{p_i} \right) = 1 \quad (78)$$

将(78)式代入(67)式, 得

$$|N_B| > \left(\frac{n}{2} \right) \left(\frac{1}{3} \right) \prod_{j=3}^{38} \left(\frac{p_{j-1}}{p_j} \right) \prod_{i=39}^r \left(\frac{p_i - 2}{p_i} \right) + 1 \quad (79)$$

由(77)和(79)可得,

$$|N_B| > \left(\frac{n}{2} \right) \left(\frac{1}{3} \right) \prod_{i=3}^r \left(\frac{p_{i-1}}{p_i} \right) + 1 = \left(\frac{n}{2} \right) \left(\frac{1}{p_r} \right) + 1 \quad (80)$$

将(69)式代入(80)式得

$$|N_B| > \left(\frac{p_r}{4} \right) + 1 \quad (81)$$

由筛选条件(5)式可知, 集合 N_B 中肯定不含元素 n 。因此, 集合 N_B 中数值超过 $(n-2)$ 的元素最多只有一个(即 $n-1$), 那么集合 N_B 中数值不超过 $(n-2)$ 的元素个数至少应为 $(|N_B| - 1)$ 个。故由(81)式可知, 集合 N_B 中数值不超过 $(n-2)$ 的元素个数为

$$|N_B| - 1 > \frac{p_r}{4} \quad (82)$$

2.1.2 通过子集 N_B 求解

我们从集合 N_B 中任取一个数值不超过 $(n-2)$ 的元素 d , 再引入参量:

$$x = n + d \quad (83)$$

$$y = n - d \quad (84)$$

以集合 P 中各元素为模数, 求得同余式组:

$$d \equiv d_i \pmod{p_i} \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$x \equiv x_i \pmod{p_i} \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$y \equiv y_i \pmod{p_i} \quad i = 1, 2, \dots, r$$

根据定义式 (83) 和 (84) 可知

$$x \in E \quad x > 1 \quad (85)$$

$$y \in E \quad y > 1 \quad (86)$$

由于 $d \in N_B$, 根据筛选条件 (5) 式可知:

$$d_i \neq n_i \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (87)$$

根据筛选条件 (6) 式可知

$$d_i \neq p_i - n_i \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (88)$$

依据同余式的性质, 由 (83) 式和 (84) 式推得

$$x_i \equiv n_i + d_i \pmod{p_i} \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (89)$$

$$y_i \equiv n_i - d_i \pmod{p_i} \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (90)$$

由 (87), (88) 和 (89) 式可得

$$x_i \neq 0 \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (91)$$

由 (87) 式和 (90) 式可得

$$y_i \neq 0 \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (92)$$

根据第一章引理 3, 由 (85) 和 (91) 式可知, x 为奇素数。

根据第一章引理 3, 由 (86) 和 (92) 式可知, y 为奇素数。

将 (83) 式和 (84) 式两端相加, 可得 $x + y = 2n$ (93)

将 (3) 式代入 (93) 式, 即得我们所要求证的关系式

$$A = x + y \quad (94)$$

(94) 式中, x 和 y 都是奇素数, 故该式即为关于偶数的哥德巴赫猜想的数学表达式。

由于集合 N_B 中每个数值不超过 $(n-2)$ 的元素都对应 (94) 式的一个解 (即一对奇素数)。从 (82) 式可知, 满足 (94) 式的解的个数应不少于 $(p_r/4)$ 个。

对于偶数 100000 而言, $p_r/4=78.25$ 故知, 偶数 100000 对应 (94) 式的解的个数必不少于 79 个 (即 79 对奇素数)。

其它大于 100000 的偶数, 所对应的 $p_r/4$ 都不小于 78.25。所以, 对应 (94) 式的解的个数亦不少于 79 个 (即 79 对奇素数)。到此, 应该得到下面的结论。

结论: 大于 100000 的任意大偶数都可表示为二个奇素数之和, 而且, 满足此条件的奇素数不少于 $(p_r/4)$ 对。 p_r 为不超过给定偶数的平方根的最大素数。

2.2 解的完备性问题

前述通过集合 N_B 求得 (94) 式的解, 并非 (94) 式的全解, 其全解还应补充以下两个部分。

2.2.1 补充解求证

一、补充解之一

延用前面的符号, $E = (1, 2, \dots, A)$

$$A = 2n \quad (n \text{ 为正整数}) \quad (95)$$

$$2 = p_1 < p_2 < \dots < p_r \leq A^{1/2} \quad (96)$$

$$n \equiv n_i \pmod{p_i} \quad i = 1, 2, \dots, r$$

由定义 (95) 式可知

$$n \in E, \quad n > 1 \quad (97)$$

$$\text{假若, } n_i \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (98)$$

根据第一章引理 3, 由 (97) 和 (98) 式可知, n 为奇素数。

由 (95) 式得, $A = n + n$ 故知, 此时 (n, n) 为满足 (94) 式的一个解。

二、补充解之二

延用前面的定义,

$$E = (1, 2, \dots, A)$$

$$P = (p_1, p_2, \dots, p_r)$$

$$2 = p_1 < p_2 < \dots < p_r \leq A^{1/2}$$

$$A \equiv A_i \pmod{p_i} \quad i = 1, 2, \dots, r$$

用筛选方法从集合 P 中分选出必要的子集。

给定筛选条件,

$$g \not\equiv A_i \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (99)$$

g 表示集合 P 中被选元素。

从集合 P 中, 将符合 (99) 式条件的所有元素分选出来, 组成子集 P_B 。

A 为偶数, 必然 $A_1 = 0$ 。由筛选条件 (99) 式可知, P_1 肯定不属于集合 P_B , 只要集合 P_B 不是空集, 则其中的元素只能是奇素数。

假若 $P_B \neq \emptyset$, 我们从集合 P_B 中任取一个奇素数 e

$$\text{且令 } z = A - e \quad (100)$$

$$\text{则 } z \in E, \quad z > 1 \quad (101)$$

以集合 P 中各元素为模数, 求得同余式组,

$$e \equiv e_i \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$z \equiv z_i \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

由于 $e \in P_B$, 根据筛选条件 (99) 式可知

$$e_i \neq A_i, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (102)$$

依据同余式的性质, 由 (100) 式推得

$$z_i \equiv A_i - e_i \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (103)$$

由 (102) 和 (103) 式可知

$$z_i \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (104)$$

根据第一章引理 3, 由 (101) 式和 (104) 式可知 z 为奇素数。

将 (100) 式移项可得,

$$A = z + e \quad (105)$$

由 (105) 式可知, (z, e) 为满足 (94) 式的一个解。同理, 集合 P_B 中的每个元素都对应 (94) 式的一个解。

2.2.2 全解构成

满足 (94) 式的全解应由以下三部分组成:

- (1) 通过集合 N_B 求得的解;
- (2) 检验 n 是否为奇素数求得的解;
- (3) 通过集合 P_B 求得的解。

2.3 求解程序

下面为用 ASP 写的求解程序, 分为“输入界面”和“运算显示”两个文件:

第一个文件 (input.asp):

```
<%@LANGUAGE="VBSCRIPT" CODEPAGE="936"%>
<html>
<head>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html;
    charset=gb2312">
<LINK href="/style.css" type=text/css rel=stylesheet>
<title>哥德巴赫猜想</title>
<script language="JavaScript" >
function suborno( (
    var a=form1.a.value;
    if(a==""||a==null) (
        alert("请输入偶数！");
        return;
    ) else if(parseInt(a)%2!=0||parseInt(a)<8) (
        alert("输入的数必须是大于等于 8 的偶数！");
        return;
    ) form1.submit();
)
</script>
</head>

<body bgcolor="#BFC0B6">
<p align="center"><font color="#FF0000" size="4"><strong>
哥德巴赫猜想求解程序</strong></font></p>
<p align="center">&nbsp;</p>
<p align="center">&nbsp;</p>
<p align="center">如果您输入的偶数较大，计算时间将会较
长，请耐心等待！ </p>
<form name="form1" method="post" action="sievejs.asp">
```


<div align="center" id="wait2_div" style="display:none">哥德巴赫猜想求解运算结果</div>

[illegible]

```
//i=0
var i1=1;
//var i2=1;
ther=0;
i=0
//alert(pr);
for(pi=2;pi<=pr;pi++)
{
    //alert(array_pi[i]);
    flag=1;
    for(j=2;j<=(pi/2);j++)
    {
        if(pi%j==0)
        {
            flag=0;
            break;
        }
    }
}
if(flag==1)
{
    ni=n%pi;
    array_ni[i]=ni;
    array_pi[i]=pi;
    array_pi2[i]=pi;
    array_ai[i]=a%pi;
    //array_pi_ni[i]=pi-ni
    //alert(array_pi[i]);
    i++;
}
}
```

ther=i;

```

flag=1;
for(i=0;i<ther;i++){
    if(array_ni[i]==0){
        flag=0;
        break;
    }
}
if(flag==1){
    document.write("<font color=#0000FF size=3>n 为素数，
即： </font>x="+n+" y="+n+" <font color=#0000FF size=3>为一对
解</font><br>");
    num1=1;
}
for(i=0;i<n;i++){
    array_n[i]=i+1;
    //alert(array_n[i]);
}
for(i=0;i<array_n.length;i++)
{
    for(k=0;k<array_pi.length;k++)
    {

        if((array_n[i]%array_pi[k]==array_ni[k])||((array_n[i]%array_pi
[k]==array_pi[k]-array_ni[k]))
        {
            array_n[i]=0;
            break;
        }

    }
}
}

```

```
}

for(i=1;i<array_pi.length;i++){
    theflag=1;
    for(k=0;k<array_pi.length;k++)
    {
        if((array_pi[i]%array_pi[k]==array_ai[k]))
        {
            array_pi2[i]=0;
            break;
        }
    }
}

array_n[n-2]=0;
```

document.write("NB 集合中数值不超过(n-2)的各元素的值为: ");

```
x=0;
for(i=0;i<n;i++){
    if(array_n[i]>0){
        x++;
        document.write(array_n[i] + " ");
    }
}
num2=x;
```

document.write("
NB 集合


```
        m=m+1;
    }

    }

}

var array_hi = new Array();
var xx=0;
var theflag;
for(i=1;i<array_pi.length;i++){
    theflag=1;
    for(k=0;k<array_pi.length;k++){
        {
            if((array_pi[i]%array_pi[k]==array_ai[k]))
            {
                theflag=0;
                break;
            }

        } if(theflag==1){
            array_hi[xx]=array_pi[i];
            xx++;
        }
    }
}
num3=xx;
if(xx>0){
```

document.write("
从集合 PB 中求得的解的个数为: " + xx + "
");

document.write("从集合 PB 中求得的解:
");

```
var astr=new String(a);
```

```
document.write("<br><div><font color=#FF0000 size=4>偶数  
<font color=#8000FF size=4>"+a+"</font>的满足哥德巴赫猜想的  
全解的个数共计: "+(num1+num2+num3)+"对<br>具体每对解的
```

```

数据见上表</font></div>");
    document.all("wait_div").style.display="none";
    document.all("wait2_div").style.display="";
}
</script>
</p></body>
</html>

```

2.4 实筛数据

输入的偶数 a 为: 2310 $n = a/2$

NB 集合中数值不超过 $(n-2)$ 的各元素的值为: 26 32 38 46 58 62 68
 94 104 122 124 134 136 142 146 164 172 218 226 244 268 272 274
 278 292 296 298 316 326 328 332 334 344 368 394 398 404 412
 416 428 446 454 464 472 482 502 508 512 514 538 542 554 568
 578 586 592 598 632 634 646 656 668 676 692 706 712 716 722
 724 734 746 758 776 796 818 824 838 842 844 848 862 872 874
 884 898 914 926 928 932 944 956 958 974 976 982 988 998 1006
 1024 1048 1052 1058 1066 1082 1084 1088 1096

NB 集合中数值不超过 $(n-2)$ 的元素的个数为: 107

通过 NB 集合求得的素数对:

$x=1181$	$y=1129$	$x=1187$	$y=1123$	$x=1193$	$y=1117$
$x=1201$	$y=1109$	$x=1213$	$y=1097$	$x=1217$	$y=1093$
$x=1223$	$y=1087$	$x=1249$	$y=1061$	$x=1259$	$y=1051$
$x=1277$	$y=1033$	$x=1279$	$y=1031$	$x=1289$	$y=1021$
$x=1291$	$y=1019$	$x=1297$	$y=1013$	$x=1301$	$y=1009$
$x=1319$	$y=0991$	$x=1327$	$y=0983$	$x=1373$	$y=0937$
$x=1381$	$y=0929$	$x=1399$	$y=0911$	$x=1423$	$y=0887$
$x=1427$	$y=0883$	$x=1429$	$y=0881$	$x=1433$	$y=0877$
$x=1447$	$y=0863$	$x=1451$	$y=0859$	$x=1453$	$y=0857$
$x=1471$	$y=0839$	$x=1481$	$y=0829$	$x=1483$	$y=0827$

$x=1487\ y=0823$	$x=1489\ y=0821$	$x=1499\ y=0811$
$x=1523\ y=0787$	$x=1549\ y=0761$	$x=1553\ y=0757$
$x=1559\ y=0751$	$x=1567\ y=0743$	$x=1571\ y=0739$
$x=1583\ y=0727$	$x=1601\ y=0709$	$x=1609\ y=0701$
$x=1619\ y=0691$	$x=1627\ y=0683$	$x=1637\ y=0673$
$x=1657\ y=0653$	$x=1663\ y=0647$	$x=1667\ y=0643$
$x=1669\ y=0641$	$x=1693\ y=0617$	$x=1697\ y=0613$
$x=1709\ y=0601$	$x=1723\ y=0587$	$x=1733\ y=0577$
$x=1741\ y=0569$	$x=1747\ y=0563$	$x=1753\ y=0557$
$x=1787\ y=0523$	$x=1789\ y=0521$	$x=1801\ y=0509$
$x=1811\ y=0499$	$x=1823\ y=0487$	$x=1831\ y=0479$
$x=1847\ y=0463$	$x=1861\ y=0449$	$x=1867\ y=0443$
$x=1871\ y=0439$	$x=1877\ y=0433$	$x=1879\ y=0431$
$x=1889\ y=0421$	$x=1901\ y=0409$	$x=1913\ y=0397$
$x=1931\ y=0379$	$x=1951\ y=0359$	$x=1973\ y=0337$
$x=1979\ y=0331$	$x=1993\ y=0317$	$x=1997\ y=0313$
$x=1999\ y=0311$	$x=2003\ y=0307$	$x=2017\ y=0293$
$x=2027\ y=0283$	$x=2029\ y=0281$	$x=2039\ y=0271$
$x=2053\ y=0257$	$x=2069\ y=0241$	$x=2081\ y=0229$
$x=2083\ y=0227$	$x=2087\ y=0223$	$x=2099\ y=0211$
$x=2111\ y=0199$	$x=2113\ y=0197$	$x=2129\ y=0181$
$x=2131\ y=0179$	$x=2137\ y=0173$	$x=2143\ y=0167$
$x=2153\ y=0157$	$x=2161\ y=0149$	$x=2179\ y=0131$
$x=2203\ y=0107$	$x=2207\ y=0103$	$x=2213\ y=0097$
$x=2221\ y=0089$	$x=2237\ y=0073$	$x=2239\ y=0071$
$x=2243\ y=0067$	$x=2251\ y=0059$	

从集合 PB 中求得的解的个数为: 7

通过 PB 集合求得的素数对:

$x=0013\ y=2297$	$x=0017\ y=2293$	$x=0023\ y=2287$
$x=0029\ y=2281$	$x=0037\ y=2273$	$x=0041\ y=2269$

$x=0043$ $y=2267$

偶数 2310 的满足哥德巴赫猜想的全解的个数共计: 114 对

输入的偶数 a 为: 2326 $n = a/2$

n 为素数, 即: $x=1163$ $y=1163$ 为一对解

NB 集合中数值不超过 $(n-2)$ 的各元素的值为: 54 60 66 114 144

210 276 324 336 390 420 444 504 546 570 660 684 714 744 810

816 900 906 924 936 966 990 1050 1074 1080 1104 1110

NB 集合中数值不超过 $(n-2)$ 的元素的个数为: 32

通过 NB 集合求得的素数对:

$x=1217$ $y=1109$ $x=1223$ $y=1103$ $x=1229$ $y=1097$

$x=1277$ $y=1049$ $x=1307$ $y=1019$ $x=1373$ $y=0953$

$x=1439$ $y=0887$ $x=1487$ $y=0839$ $x=1499$ $y=0827$

$x=1553$ $y=0773$ $x=1583$ $y=0743$ $x=1607$ $y=0719$

$x=1667$ $y=0659$ $x=1709$ $y=0617$ $x=1733$ $y=0593$

$x=1823$ $y=0503$ $x=1847$ $y=0479$ $x=1877$ $y=0449$

$x=1907$ $y=0419$ $x=1973$ $y=0353$ $x=1979$ $y=0347$

$x=2063$ $y=0263$ $x=2069$ $y=0257$ $x=2087$ $y=0239$

$x=2099$ $y=0227$ $x=2129$ $y=0197$ $x=2153$ $y=0173$

$x=2213$ $y=0113$ $x=2237$ $y=0089$ $x=2243$ $y=0083$

$x=2267$ $y=0059$ $x=2273$ $y=0053$

从集合 PB 中求得的解的个数为: 2

通过 PB 求得的素数对:

$x=0017$ $y=2309$ $x=0029$ $y=2297$

偶数 2326 的满足哥德巴赫猜想的全解的个数共计: 35 对

输入的偶数 a 为: 90090 $n = a/2$

NB 集合中数值不超过 $(n-2)$ 的各元素的值为: 32 38 74 82 86 92
136 152 202 236 248 272 274 292 316 344 358 388 394 458 496
508 512 544 554 596 628 662 772 776 778 782 788 796 824 842
914 926 934 944 1004 1016 1028 1048 1054 1058 1102 1154 1192
1256 1262 1264 1292 1354 1394 1396 1412 1432 1454 1466 1504
1528 1546 1588 1594 1604 1618 1634 1642 1646 1724 1726 1762
1774 1784 1808 1822 1844 1856 1912 1952 1996 2042 2066 2078
2084 2092 2102 2116 2144 2192 2206 2224 2248 2252 2258 2272
2294 2308 2318 2336 2342 2344 2362 2396 2456 2468 2476 2488
2536 2546 2554 2578 2584 2594 2608 2612 2636 2654 2666 2672
2696 2746 2752 2762 2764 2824 2836 2858 2866 2888 2906 2972
2984 3028 3046 3064 3076 3086 3118 3134 3142 3148 3152 3194
3202 3236 3268 3308 3326 3364 3404 3418 3428 3434 3436 3442
3452 3496 3526 3566 3578 3602 3632 3634 3688 3712 3764 3776
3802 3812 3814 3824 3844 3862 3902 3928 3964 3988 3998 4072
4112 4148 4162 4166 4178 4216 4232 4286 4294 4346 4348 4406
4418 4436 4454 4486 4502 4514 4552 4558 4618 4622 4694 4702
4756 4762 4808 4832 4876 4882 4892 4894 4946 5006 5008 5032
5056 5066 5074 5108 5162 5176 5182 5216 5218 5246 5266 5276
5284 5296 5318 5342 5366 5378 5414 5482 5494 5504 5536 5542
5546 5602 5606 5626 5662 5678 5722 5728 5732 5744 5794 5804
5812 5828 5846 5864 5884 5906 5912 5926 5948 5956 5998 6002
6026 6086 6092 6112 6124 6154 6172 6184 6194 6212 6242 6262
6296 6298 6316 6338 6368 6374 6376 6392 6394 6416 6434 6436
6442 6476 6586 6592 6614 6668 6674 6724 6742 6758 6772 6784
6808 6814 6826 6848 6862 6868 6896 6926 6932 6976 7006 7058
7082 7138 7156 7192 7214 7246 7346 7388 7412 7456 7466 7472
7484 7496 7498 7508 7516 7534 7538 7582 7622 7666 7676 7682
7688 7724 7738 7768 7772 7792 7844 7856 7874 7906 7922 7928
7958 8006 8024 8032 8042 8048 8072 8102 8116 8126 8144 8188

8224 8236 8254 8264 8278 8332 8336 8362 8374 8392 8408 8458
8462 8482 8504 8548 8552 8566 8572 8578 8588 8594 8612 8672
8732 8738 8746 8768 8804 8816 8836 8854 8894 8914 8948 9038
9046 9076 9094 9122 9148 9206 9242 9248 9274 9286 9316 9368
9374 9448 9452 9454 9472 9476 9502 9514 9518 9536 9538 9584
9622 9664 9682 9706 9722 9728 9734 9754 9788 9824 9874 9896
9904 9928 9934 9938 9956 9964 9976 10064 10082 10126 10162
10168 10174 10198 10204 10286 10288 10298 10306 10366 10394
10396 10442 10456 10496 10502 10534 10544 10558 10574 10576
10588 10616 10676 10718 10742 10748 10762 10772 10778 10784
10792 10886 10888 10904 10922 11048 11078 11104 11122 11134
11152 11194 11218 11254 11288 11324 11332 11398 11408 11422
11428 11432 11444 11456 11458 11464 11482 11498 11524 11552
11566 11584 11588 11618 11636 11642 11668 11686 11692 11702
11728 11734 11798 11846 11864 11866 11884 11896 11938 11954
11992 11996 12032 12052 12062 12074 12104 12128 12134 12158
12176 12206 12214 12242 12256 12328 12338 12352 12412 12442
12458 12482 12484 12512 12514 12542 12548 12604 12622 12634
12644 12664 12668 12674 12682 12686 12692 12736 12742 12746
12748 12784 12794 12808 12854 12856 12872 12902 12928 12946
12968 12982 12986 13016 13054 13064 13154 13162 13172 13186
13198 13276 13318 13322 13324 13346 13358 13382 13396 13498
13504 13528 13534 13556 13568 13648 13654 13666 13688 13712
13718 13726 13786 13852 13856 13862 13864 13868 13892 13898
13922 13964 13966 13976 14006 14032 14062 14068 14074 14096
14104 14114 14152 14164 14174 14176 14194 14228 14236 14288
14332 14342 14348 14374 14396 14402 14408 14452 14468 14516
14536 14576 14614 14618 14654 14678 14698 14726 14752 14834
14842 14876 14884 14906 14912 14926 14936 14954 15032 15056
15062 15124 15164 15172 15178 15212 15226 15286 15292 15328

15382 15404 15412 15464 15476 15544 15562 15572 15592 15602
15616 15634 15644 15658 15682 15712 15718 15734 15748 15776
15814 15824 15844 15854 15872 15878 15892 15898 15908 15916
15982 15986 16012 16084 16096 16124 16166 16178 16186 16208
16238 16252 16286 16294 16334 16358 16396 16418 16424 16426
16438 16442 16448 16466 16474 16498 16508 16568 16582 16598
16606 16612 16636 16642 16658 16736 16768 16816 16826 16834
16864 16882 16922 16934 16936 16946 16958 16994 17026 17084
17092 17098 17126 17144 17162 17228 17252 17254 17266 17278
17282 17302 17306 17356 17372 17414 17428 17462 17494 17504
17518 17536 17558 17588 17608 17614 17638 17678 17708 17716
17746 17774 17806 17936 17938 17942 17984 17986 18014 18028
18034 18052 18058 18086 18152 18154 18166 18196 18232 18268
18286 18308 18316 18322 18332 18344 18346 18352 18364 18376
18398 18418 18448 18454 18488 18532 18544 18556 18566 18614
18622 18646 18652 18658 18674 18698 18728 18736 18748 18778
18794 18796 18808 18818 18856 18862 18868 18884 18904 18932
18962 18992 19046 19064 19106 19112 19126 19142 19172 19178
19226 19274 19282 19328 19388 19406 19444 19468 19508 19522
19576 19582 19588 19622 19634 19672 19702 19736 19738 19808
19826 19856 19874 19876 19882 19892 19924 19958 19988 20008
20056 20066 20074 20078 20102 20122 20126 20128 20138 20168
20194 20224 20264 20278 20282 20312 20336 20348 20362 20368
20374 20434 20452 20474 20494 20498 20512 20518 20536 20564
20572 20602 20606 20632 20654 20672 20674 20686 20716 20764
20794 20798 20806 20822 20876 20912 20936 20938 20948 20984
20996 21002 21022 21026 21038 21044 21064 21116 21128 21134
21146 21176 21226 21256 21292 21298 21302 21358 21368 21412
21418 21422 21446 21464 21478 21484 21488 21496 21508 21548
21572 21598 21676 21688 21706 21718 21752 21776 21818 21844

21878 21886 21902 21914 21928 21958 21988 22004 22016 22028
22034 22084 22108 22124 22144 22168 22174 22186 22228 22262
22294 22304 22324 22346 22354 22366 22376 22402 22408 22432
22478 22502 22514 22534 22544 22562 22654 22664 22678 22696
22738 22762 22774 22798 22856 22886 22888 22898 22912 22916
22922 22934 22978 23008 23014 23042 23054 23068 23102 23116
23164 23174 23182 23194 23306 23344 23398 23428 23432 23444
23446 23456 23476 23486 23522 23552 23638 23654 23666 23668
23698 23704 23722 23726 23732 23768 23776 23818 23834 23852
23854 23858 23882 23902 23956 23984 23986 24022 24028 24064
24082 24098 24106 24146 24148 24158 24188 24272 24292 24296
24326 24338 24382 24418 24446 24452 24494 24512 24646 24652
24692 24718 24722 24776 24784 24812 24814 24884 24896 24956
24974 24994 25016 25022 25034 25054 25066 25072 25096 25118
25132 25154 25156 25178 25184 25192 25204 25226 25244 25252
25268 25282 25306 25328 25336 25348 25384 25436 25442 25462
25492 25504 25538 25544 25562 25574 25576 25582 25612 25618
25622 25642 25664 25672 25778 25796 25808 25832 25834 25904
25906 25924 25966 25994 26014 26036 26044 26098 26126 26146
26242 26248 26272 26288 26296 26302 26314 26344 26354 26366
26374 26384 26408 26428 26458 26492 26504 26506 26524 26552
26588 26602 26618 26648 26666 26674 26716 26732 26744 26776
26792 26816 26822 26834 26854 26864 26896 26902 26918 26926
26948 26986 26998 27002 27032 27056 27058 27064 27116 27122
27124 27182 27206 27208 27262 27296 27308 27338 27376 27386
27422 27436 27448 27506 27568 27578 27602 27626 27628 27644
27656 27662 27694 27718 27752 27814 27838 27856 27862 27878
27886 27908 27928 27952 27968 27992 27998 28016 28018 28034
28082 28144 28214 28258 28282 28286 28316 28342 28372 28388
28414 28426 28438 28472 28478 28484 28516 28526 28552 28564

28568 28592 28598 28628 28634 28664 28676 28682 28706 28712
28726 28778 28814 28822 28852 28862 28906 28954 28972 28976
28982 29054 29086 29122 29132 29144 29156 29158 29164 29186
29242 29248 29272 29278 29308 29312 29318 29366 29374 29396
29404 29426 29444 29462 29464 29476 29486 29552 29578 29654
29662 29668 29672 29684 29686 29714 29716 29726 29776 29782
29786 29812 29828 29846 29852 29858 29884 29896 29914 29968
29972 29984 29992 30088 30116 30122 30148 30166 30178 30194
30224 30232 30262 30278 30292 30308 30322 30332 30346 30362
30392 30482 30488 30494 30496 30508 30512 30526 30566 30584
30596 30608 30614 30634 30638 30644 30658 30676 30698 30722
30742 30752 30824 30838 30868 30886 30892 30896 30938 30958
30994 31034 31036 31046 31078 31112 31114 31162 31168 31186
31204 31214 31216 31238 31288 31322 31324 31334 31358 31376
31396 31418 31426 31448 31492 31558 31604 31628 31634 31708
31732 31736 31786 31826 31828 31862 31868 31874 31898 31918
31946 31996 32002 32036 32092 32122 32126 32146 32156 32192
32204 32216 32222 32224 32246 32302 32306 32324 32332 32374
32386 32426 32432 32434 32444 32468 32476 32498 32504 32506
32518 32528 32542 32566 32572 32636 32644 32654 32666 32668
32698 32702 32716 32756 32768 32794 32804 32818 32848 32884
32888 32932 32938 32972 32996 33004 33034 33076 33092 33112
33118 33122 33148 33158 33214 33232 33238 33256 33262 33266
33302 33356 33452 33466 33494 33496 33526 33548 33562 33578
33598 33608 33646 33652 33662 33676 33692 33734 33746 33758
33794 33832 33848 33874 33884 33896 33932 33986 33998 34018
34042 34058 34066 34088 34106 34108 34136 34142 34156 34184
34186 34214 34256 34264 34274 34292 34312 34322 34334 34354
34378 34382 34388 34406 34448 34486 34514 34516 34544 34568
34582 34586 34588 34612 34646 34654 34712 34724 34732 34756

34772 34778 34798 34802 34822 34894 34934 34942 34952 34954
34976 35006 35096 35104 35122 35162 35186 35188 35194 35206
35228 35234 35242 35264 35296 35302 35324 35384 35402 35426
35444 35512 35554 35566 35582 35584 35606 35612 35624 35626
35632 35642 35668 35702 35704 35734 35764 35788 35804 35818
35864 35872 35884 35888 35908 35918 35978 35986 35996 36002
36004 36032 36038 36074 36112 36152 36158 36178 36238 36262
36298 36304 36308 36314 36326 36356 36364 36376 36418 36464
36472 36482 36502 36506 36508 36518 36524 36584 36602 36622
36626 36656 36658 36682 36692 36716 36728 36754 36772 36802
36808 36824 36854 36874 36884 36898 36922 36928 36958 36964
36976 36986 36992 37006 37028 37094 37096 37108 37118 37126
37138 37144 37162 37172 37178 37192 37216 37222 37256 37304
37328 37342 37376 37424 37438 37442 37454 37462 37484 37486
37504 37516 37522 37546 37556 37564 37568 37588 37612 37676
37712 37714 37736 37748 37792 37802 37838 37858 37868 37894
37918 37936 38002 38018 38026 38032 38044 38048 38162 38174
38176 38182 38188 38212 38222 38254 38266 38312 38344 38354
38356 38372 38386 38392 38426 38492 38516 38564 38572 38576
38594 38596 38618 38656 38672 38692 38716 38728 38746 38768
38788 38798 38824 38828 38846 38894 38924 38966 38972 39002
39008 39016 39092 39118 39166 39176 39178 39184 39194 39202
39218 39254 39262 39302 39304 39344 39356 39362 39376 39386
39392 39398 39404 39422 39454 39464 39476 39488 39514 39544
39604 39608 39614 39628 39646 39652 39742 39748 39764 39766
39812 39814 39874 39932 39946 39964 40036 40042 40046 40058
40076 40088 40102 40114 40156 40168 40184 40214 40252 40258
40286 40316 40324 40366 40382 40394 40402 40406 40408 40424
40442 40478 40526 40532 40552 40562 40582 40594 40598 40622
40624 40672 40688 40706 40748 40772 40774 40784 40786 40792

40802 40844 40886 40888 40946 40954 40966 40972 41024 41032
 41038 41098 41116 41126 41134 41138 41156 41164 41194 41198
 41212 41224 41242 41248 41252 41266 41278 41306 41312 41326
 41336 41344 41354 41368 41408 41422 41432 41464 41486 41488
 41516 41528 41534 41554 41582 41584 41632 41674 41684 41698
 41722 41726 41738 41792 41816 41824 41878 41882 41924 41936
 41966 41996 42004 42026 42074 42076 42088 42106 42136 42142
 42166 42208 42212 42248 42254 42268 42278 42292 42314 42338
 42358 42362 42382 42388 42398 42428 42436 42466 42494 42496
 42502 42514 42542 42568 42578 42586 42598 42604 42634 42646
 42652 42656 42674 42694 42698 42706 42748 42752 42758 42808
 42824 42832 42842 42866 42914 42916 42932 42946 42956 42958
 42962 42992 43034 43048 43072 43132 43166 43178 43214 43244
 43256 43292 43352 43378 43382 43418 43424 43426 43448 43478
 43502 43546 43562 43564 43598 43606 43612 43616 43618 43622
 43636 43684 43726 43744 43748 43754 43756 43762 43766 43768
 43808 43816 43822 43828 43852 43858 43874 43892 43948 43952
 43958 43976 43996 44006 44012 44024 44026 44062 44068 44074
 44078 44092 44108 44158 44164 44168 44182 44186 44192 44216
 44224 44248 44258 44272 44284 44318 44326 44336 44354 44368
 44372 44386 44398 44404 44414 44432 44446 44468 44474 44476
 44482 44488 44522 44546 44554 44558 44566 44582 44588 44612
 44614 44624 44626 44636 44644 44708 44714 44734 44738

NB 集合中数值不超过 $(n-2)$ 的元素的个数为: 2103

通过 NB 集合求得的素数对:

$x=45077$ $y=45013$ $x=45083$ $y=45007$ $x=45119$ $y=44971$
 $x=45127$ $y=44963$ $x=45131$ $y=44959$ $x=45137$ $y=44953$
 $x=45181$ $y=44909$ $x=45197$ $y=44893$ $x=45247$ $y=44843$
 $x=45281$ $y=44809$ $x=45293$ $y=44797$ $x=45317$ $y=44773$

$x=45319$	$y=44771$	$x=45337$	$y=44753$	$x=45361$	$y=44729$
$x=45389$	$y=44701$	$x=45403$	$y=44687$	$x=45433$	$y=44657$
$x=45439$	$y=44651$	$x=45503$	$y=44587$	$x=45541$	$y=44549$
$x=45553$	$y=44537$	$x=45557$	$y=44533$	$x=45589$	$y=44501$
$x=45599$	$y=44491$	$x=45641$	$y=44449$	$x=45673$	$y=44417$
$x=45707$	$y=44383$	$x=45817$	$y=44273$	$x=45821$	$y=44269$
$x=45823$	$y=44267$	$x=45827$	$y=44263$	$x=45833$	$y=44257$
$x=45841$	$y=44249$	$x=45869$	$y=44221$	$x=45887$	$y=44203$
$x=45959$	$y=44131$	$x=45971$	$y=44119$	$x=45979$	$y=44111$
$x=45989$	$y=44101$	$x=46049$	$y=44041$	$x=46061$	$y=44029$
$x=46073$	$y=44017$	$x=46093$	$y=43997$	$x=46099$	$y=43991$
$x=46103$	$y=43987$	$x=46147$	$y=43943$	$x=46199$	$y=43891$
$x=46237$	$y=43853$	$x=46301$	$y=43789$	$x=46307$	$y=43783$
$x=46309$	$y=43781$	$x=46337$	$y=43753$	$x=46399$	$y=43691$
$x=46439$	$y=43651$	$x=46441$	$y=43649$	$x=46457$	$y=43633$
$x=46477$	$y=43613$	$x=46499$	$y=43591$	$x=46511$	$y=43579$
$x=46549$	$y=43541$	$x=46573$	$y=43517$	$x=46591$	$y=43499$
$x=46633$	$y=43457$	$x=46639$	$y=43451$	$x=46649$	$y=43441$
$x=46663$	$y=43427$	$x=46679$	$y=43411$	$x=46687$	$y=43403$
$x=46691$	$y=43399$	$x=46769$	$y=43321$	$x=46771$	$y=43319$
$x=46807$	$y=43283$	$x=46819$	$y=43271$	$x=46829$	$y=43261$
$x=46853$	$y=43237$	$x=46867$	$y=43223$	$x=46889$	$y=43201$
$x=46901$	$y=43189$	$x=46957$	$y=43133$	$x=46997$	$y=43093$
$x=47041$	$y=43049$	$x=47087$	$y=43003$	$x=47111$	$y=42979$
$x=47123$	$y=42967$	$x=47129$	$y=42961$	$x=47137$	$y=42953$
$x=47147$	$y=42943$	$x=47161$	$y=42929$	$x=47189$	$y=42901$
$x=47237$	$y=42853$	$x=47251$	$y=42839$	$x=47269$	$y=42821$
$x=47293$	$y=42797$	$x=47297$	$y=42793$	$x=47303$	$y=42787$
$x=47317$	$y=42773$	$x=47339$	$y=42751$	$x=47353$	$y=42737$
$x=47363$	$y=42727$	$x=47381$	$y=42709$	$x=47387$	$y=42703$

$x=47389$	$y=42701$	$x=47407$	$y=42683$	$x=47441$	$y=42649$
$x=47501$	$y=42589$	$x=47513$	$y=42577$	$x=47521$	$y=42569$
$x=47533$	$y=42557$	$x=47581$	$y=42509$	$x=47591$	$y=42499$
$x=47599$	$y=42491$	$x=47623$	$y=42467$	$x=47629$	$y=42461$
$x=47639$	$y=42451$	$x=47653$	$y=42437$	$x=47657$	$y=42433$
$x=47681$	$y=42409$	$x=47699$	$y=42391$	$x=47711$	$y=42379$
$x=47717$	$y=42373$	$x=47741$	$y=42349$	$x=47791$	$y=42299$
$x=47797$	$y=42293$	$x=47807$	$y=42283$	$x=47809$	$y=42281$
$x=47869$	$y=42221$	$x=47881$	$y=42209$	$x=47903$	$y=42187$
$x=47911$	$y=42179$	$x=47933$	$y=42157$	$x=47951$	$y=42139$
$x=48017$	$y=42073$	$x=48029$	$y=42061$	$x=48073$	$y=42017$
$x=48091$	$y=41999$	$x=48109$	$y=41981$	$x=48121$	$y=41969$
$x=48131$	$y=41959$	$x=48163$	$y=41927$	$x=48179$	$y=41911$
$x=48187$	$y=41903$	$x=48193$	$y=41897$	$x=48197$	$y=41893$
$x=48239$	$y=41851$	$x=48247$	$y=41843$	$x=48281$	$y=41809$
$x=48313$	$y=41777$	$x=48353$	$y=41737$	$x=48371$	$y=41719$
$x=48409$	$y=41681$	$x=48449$	$y=41641$	$x=48463$	$y=41627$
$x=48473$	$y=41617$	$x=48479$	$y=41611$	$x=48481$	$y=41609$
$x=48487$	$y=41603$	$x=48497$	$y=41593$	$x=48541$	$y=41549$
$x=48571$	$y=41519$	$x=48611$	$y=41479$	$x=48623$	$y=41467$
$x=48647$	$y=41443$	$x=48677$	$y=41413$	$x=48679$	$y=41411$
$x=48733$	$y=41357$	$x=48757$	$y=41333$	$x=48809$	$y=41281$
$x=48821$	$y=41269$	$x=48847$	$y=41243$	$x=48857$	$y=41233$
$x=48859$	$y=41231$	$x=48869$	$y=41221$	$x=48889$	$y=41201$
$x=48907$	$y=41183$	$x=48947$	$y=41143$	$x=48973$	$y=41117$
$x=49009$	$y=41081$	$x=49033$	$y=41057$	$x=49043$	$y=41047$
$x=49117$	$y=40973$	$x=49157$	$y=40933$	$x=49193$	$y=40897$
$x=49207$	$y=40883$	$x=49211$	$y=40879$	$x=49223$	$y=40867$
$x=49261$	$y=40829$	$x=49277$	$y=40813$	$x=49331$	$y=40759$
$x=49339$	$y=40751$	$x=49391$	$y=40699$	$x=49393$	$y=40697$

$x=49451$	$y=40639$	$x=49463$	$y=40627$	$x=49481$	$y=40609$
$x=49499$	$y=40591$	$x=49531$	$y=40559$	$x=49547$	$y=40543$
$x=49559$	$y=40531$	$x=49597$	$y=40493$	$x=49603$	$y=40487$
$x=49663$	$y=40427$	$x=49667$	$y=40423$	$x=49739$	$y=40351$
$x=49747$	$y=40343$	$x=49801$	$y=40289$	$x=49807$	$y=40283$
$x=49853$	$y=40237$	$x=49877$	$y=40213$	$x=49921$	$y=40169$
$x=49927$	$y=40163$	$x=49937$	$y=40153$	$x=49939$	$y=40151$
$x=49991$	$y=40099$	$x=50051$	$y=40039$	$x=50053$	$y=40037$
$x=50077$	$y=40013$	$x=50101$	$y=39989$	$x=50111$	$y=39979$
$x=50119$	$y=39971$	$x=50153$	$y=39937$	$x=50207$	$y=39883$
$x=50221$	$y=39869$	$x=50227$	$y=39863$	$x=50261$	$y=39829$
$x=50263$	$y=39827$	$x=50291$	$y=39799$	$x=50311$	$y=39779$
$x=50321$	$y=39769$	$x=50329$	$y=39761$	$x=50341$	$y=39749$
$x=50363$	$y=39727$	$x=50387$	$y=39703$	$x=50411$	$y=39679$
$x=50423$	$y=39667$	$x=50459$	$y=39631$	$x=50527$	$y=39563$
$x=50539$	$y=39551$	$x=50549$	$y=39541$	$x=50581$	$y=39509$
$x=50587$	$y=39503$	$x=50591$	$y=39499$	$x=50647$	$y=39443$
$x=50651$	$y=39439$	$x=50671$	$y=39419$	$x=50707$	$y=39383$
$x=50723$	$y=39367$	$x=50767$	$y=39323$	$x=50773$	$y=39317$
$x=50777$	$y=39313$	$x=50789$	$y=39301$	$x=50839$	$y=39251$
$x=50849$	$y=39241$	$x=50857$	$y=39233$	$x=50873$	$y=39217$
$x=50891$	$y=39199$	$x=50909$	$y=39181$	$x=50929$	$y=39161$
$x=50951$	$y=39139$	$x=50957$	$y=39133$	$x=50971$	$y=39119$
$x=50993$	$y=39097$	$x=51001$	$y=39089$	$x=51043$	$y=39047$
$x=51047$	$y=39043$	$x=51071$	$y=39019$	$x=51131$	$y=38959$
$x=51137$	$y=38953$	$x=51157$	$y=38933$	$x=51169$	$y=38921$
$x=51199$	$y=38891$	$x=51217$	$y=38873$	$x=51229$	$y=38861$
$x=51239$	$y=38851$	$x=51257$	$y=38833$	$x=51287$	$y=38803$
$x=51307$	$y=38783$	$x=51341$	$y=38749$	$x=51343$	$y=38747$
$x=51361$	$y=38729$	$x=51383$	$y=38707$	$x=51413$	$y=38677$

$x=51419$	$y=38671$	$x=51421$	$y=38669$	$x=51437$	$y=38653$
$x=51439$	$y=38651$	$x=51461$	$y=38629$	$x=51479$	$y=38611$
$x=51481$	$y=38609$	$x=51487$	$y=38603$	$x=51521$	$y=38569$
$x=51631$	$y=38459$	$x=51637$	$y=38453$	$x=51659$	$y=38431$
$x=51713$	$y=38377$	$x=51719$	$y=38371$	$x=51769$	$y=38321$
$x=51787$	$y=38303$	$x=51803$	$y=38287$	$x=51817$	$y=38273$
$x=51829$	$y=38261$	$x=51853$	$y=38237$	$x=51859$	$y=38231$
$x=51871$	$y=38219$	$x=51893$	$y=38197$	$x=51907$	$y=38183$
$x=51913$	$y=38177$	$x=51941$	$y=38149$	$x=51971$	$y=38119$
$x=51977$	$y=38113$	$x=52021$	$y=38069$	$x=52051$	$y=38039$
$x=52103$	$y=37987$	$x=52127$	$y=37963$	$x=52183$	$y=37907$
$x=52201$	$y=37889$	$x=52237$	$y=37853$	$x=52259$	$y=37831$
$x=52291$	$y=37799$	$x=52391$	$y=37699$	$x=52433$	$y=37657$
$x=52457$	$y=37633$	$x=52501$	$y=37589$	$x=52511$	$y=37579$
$x=52517$	$y=37573$	$x=52529$	$y=37561$	$x=52541$	$y=37549$
$x=52543$	$y=37547$	$x=52553$	$y=37537$	$x=52561$	$y=37529$
$x=52579$	$y=37511$	$x=52583$	$y=37507$	$x=52627$	$y=37463$
$x=52667$	$y=37423$	$x=52711$	$y=37379$	$x=52721$	$y=37369$
$x=52727$	$y=37363$	$x=52733$	$y=37357$	$x=52769$	$y=37321$
$x=52783$	$y=37307$	$x=52813$	$y=37277$	$x=52817$	$y=37273$
$x=52837$	$y=37253$	$x=52889$	$y=37201$	$x=52901$	$y=37189$
$x=52919$	$y=37171$	$x=52951$	$y=37139$	$x=52967$	$y=37123$
$x=52973$	$y=37117$	$x=53003$	$y=37087$	$x=53051$	$y=37039$
$x=53069$	$y=37021$	$x=53077$	$y=37013$	$x=53087$	$y=37003$
$x=53093$	$y=36997$	$x=53117$	$y=36973$	$x=53147$	$y=36943$
$x=53161$	$y=36929$	$x=53171$	$y=36919$	$x=53189$	$y=36901$
$x=53233$	$y=36857$	$x=53269$	$y=36821$	$x=53281$	$y=36809$
$x=53299$	$y=36791$	$x=53309$	$y=36781$	$x=53323$	$y=36767$
$x=53377$	$y=36713$	$x=53381$	$y=36709$	$x=53407$	$y=36683$
$x=53419$	$y=36671$	$x=53437$	$y=36653$	$x=53453$	$y=36637$

$x=53503$	$y=36587$	$x=53507$	$y=36583$	$x=53527$	$y=36563$
$x=53549$	$y=36541$	$x=53593$	$y=36497$	$x=53597$	$y=36493$
$x=53611$	$y=36479$	$x=53617$	$y=36473$	$x=53623$	$y=36467$
$x=53633$	$y=36457$	$x=53639$	$y=36451$	$x=53657$	$y=36433$
$x=53717$	$y=36373$	$x=53777$	$y=36313$	$x=53783$	$y=36307$
$x=53791$	$y=36299$	$x=53813$	$y=36277$	$x=53849$	$y=36241$
$x=53861$	$y=36229$	$x=53881$	$y=36209$	$x=53899$	$y=36191$
$x=53939$	$y=36151$	$x=53959$	$y=36131$	$x=53993$	$y=36097$
$x=54083$	$y=36007$	$x=54091$	$y=35999$	$x=54121$	$y=35969$
$x=54139$	$y=35951$	$x=54167$	$y=35923$	$x=54193$	$y=35897$
$x=54251$	$y=35839$	$x=54287$	$y=35803$	$x=54293$	$y=35797$
$x=54319$	$y=35771$	$x=54331$	$y=35759$	$x=54361$	$y=35729$
$x=54413$	$y=35677$	$x=54419$	$y=35671$	$x=54493$	$y=35597$
$x=54497$	$y=35593$	$x=54499$	$y=35591$	$x=54517$	$y=35573$
$x=54521$	$y=35569$	$x=54547$	$y=35543$	$x=54559$	$y=35531$
$x=54563$	$y=35527$	$x=54581$	$y=35509$	$x=54583$	$y=35507$
$x=54629$	$y=35461$	$x=54667$	$y=35423$	$x=54709$	$y=35381$
$x=54727$	$y=35363$	$x=54751$	$y=35339$	$x=54767$	$y=35323$
$x=54773$	$y=35317$	$x=54779$	$y=35311$	$x=54799$	$y=35291$
$x=54833$	$y=35257$	$x=54869$	$y=35221$	$x=54919$	$y=35171$
$x=54941$	$y=35149$	$x=54949$	$y=35141$	$x=54973$	$y=35117$
$x=54979$	$y=35111$	$x=54983$	$y=35107$	$x=55001$	$y=35089$
$x=55009$	$y=35081$	$x=55021$	$y=35069$	$x=55109$	$y=34981$
$x=55127$	$y=34963$	$x=55171$	$y=34919$	$x=55207$	$y=34883$
$x=55213$	$y=34877$	$x=55219$	$y=34871$	$x=55243$	$y=34847$
$x=55249$	$y=34841$	$x=55331$	$y=34759$	$x=55333$	$y=34757$
$x=55343$	$y=34747$	$x=55351$	$y=34739$	$x=55411$	$y=34679$
$x=55439$	$y=34651$	$x=55441$	$y=34649$	$x=55487$	$y=34603$
$x=55501$	$y=34589$	$x=55541$	$y=34549$	$x=55547$	$y=34543$
$x=55579$	$y=34511$	$x=55589$	$y=34501$	$x=55603$	$y=34487$

$x=55619$	$y=34471$	$x=55621$	$y=34469$	$x=55633$	$y=34457$
$x=55661$	$y=34429$	$x=55721$	$y=34369$	$x=55763$	$y=34327$
$x=55787$	$y=34303$	$x=55793$	$y=34297$	$x=55807$	$y=34283$
$x=55817$	$y=34273$	$x=55823$	$y=34267$	$x=55829$	$y=34261$
$x=55837$	$y=34253$	$x=55931$	$y=34159$	$x=55933$	$y=34157$
$x=55949$	$y=34141$	$x=55967$	$y=34123$	$x=56093$	$y=33997$
$x=56123$	$y=33967$	$x=56149$	$y=33941$	$x=56167$	$y=33923$
$x=56179$	$y=33911$	$x=56197$	$y=33893$	$x=56239$	$y=33851$
$x=56263$	$y=33827$	$x=56299$	$y=33791$	$x=56333$	$y=33757$
$x=56369$	$y=33721$	$x=56377$	$y=33713$	$x=56443$	$y=33647$
$x=56453$	$y=33637$	$x=56467$	$y=33623$	$x=56473$	$y=33617$
$x=56477$	$y=33613$	$x=56489$	$y=33601$	$x=56501$	$y=33589$
$x=56503$	$y=33587$	$x=56509$	$y=33581$	$x=56527$	$y=33563$
$x=56543$	$y=33547$	$x=56569$	$y=33521$	$x=56597$	$y=33493$
$x=56611$	$y=33479$	$x=56629$	$y=33461$	$x=56633$	$y=33457$
$x=56663$	$y=33427$	$x=56681$	$y=33409$	$x=56687$	$y=33403$
$x=56713$	$y=33377$	$x=56731$	$y=33359$	$x=56737$	$y=33353$
$x=56747$	$y=33343$	$x=56773$	$y=33317$	$x=56779$	$y=33311$
$x=56843$	$y=33247$	$x=56891$	$y=33199$	$x=56909$	$y=33181$
$x=56911$	$y=33179$	$x=56929$	$y=33161$	$x=56941$	$y=33149$
$x=56983$	$y=33107$	$x=56999$	$y=33091$	$x=57037$	$y=33053$
$x=57041$	$y=33049$	$x=57077$	$y=33013$	$x=57097$	$y=32993$
$x=57107$	$y=32983$	$x=57119$	$y=32971$	$x=57149$	$y=32941$
$x=57173$	$y=32917$	$x=57179$	$y=32911$	$x=57203$	$y=32887$
$x=57221$	$y=32869$	$x=57251$	$y=32839$	$x=57259$	$y=32831$
$x=57287$	$y=32803$	$x=57301$	$y=32789$	$x=57373$	$y=32717$
$x=57383$	$y=32707$	$x=57397$	$y=32693$	$x=57457$	$y=32633$
$x=57487$	$y=32603$	$x=57503$	$y=32587$	$x=57527$	$y=32563$
$x=57529$	$y=32561$	$x=57557$	$y=32533$	$x=57559$	$y=32531$
$x=57587$	$y=32503$	$x=57593$	$y=32497$	$x=57649$	$y=32441$

$x=57667$	$y=32423$	$x=57679$	$y=32411$	$x=57689$	$y=32401$
$x=57709$	$y=32381$	$x=57713$	$y=32377$	$x=57719$	$y=32371$
$x=57727$	$y=32363$	$x=57731$	$y=32359$	$x=57737$	$y=32353$
$x=57781$	$y=32309$	$x=57787$	$y=32303$	$x=57791$	$y=32299$
$x=57793$	$y=32297$	$x=57829$	$y=32261$	$x=57839$	$y=32251$
$x=57853$	$y=32237$	$x=57899$	$y=32191$	$x=57901$	$y=32189$
$x=57917$	$y=32173$	$x=57947$	$y=32143$	$x=57973$	$y=32117$
$x=57991$	$y=32099$	$x=58013$	$y=32077$	$x=58027$	$y=32063$
$x=58031$	$y=32059$	$x=58061$	$y=32029$	$x=58099$	$y=31991$
$x=58109$	$y=31981$	$x=58199$	$y=31891$	$x=58207$	$y=31883$
$x=58217$	$y=31873$	$x=58231$	$y=31859$	$x=58243$	$y=31847$
$x=58321$	$y=31769$	$x=58363$	$y=31727$	$x=58367$	$y=31723$
$x=58369$	$y=31721$	$x=58391$	$y=31699$	$x=58403$	$y=31687$
$x=58427$	$y=31663$	$x=58441$	$y=31649$	$x=58543$	$y=31547$
$x=58549$	$y=31541$	$x=58573$	$y=31517$	$x=58579$	$y=31511$
$x=58601$	$y=31489$	$x=58613$	$y=31477$	$x=58693$	$y=31397$
$x=58699$	$y=31391$	$x=58711$	$y=31379$	$x=58733$	$y=31357$
$x=58757$	$y=31333$	$x=58763$	$y=31327$	$x=58771$	$y=31319$
$x=58831$	$y=31259$	$x=58897$	$y=31193$	$x=58901$	$y=31189$
$x=58907$	$y=31183$	$x=58909$	$y=31181$	$x=58913$	$y=31177$
$x=58937$	$y=31153$	$x=58943$	$y=31147$	$x=58967$	$y=31123$
$x=59009$	$y=31081$	$x=59011$	$y=31079$	$x=59021$	$y=31069$
$x=59051$	$y=31039$	$x=59077$	$y=31013$	$x=59107$	$y=30983$
$x=59113$	$y=30977$	$x=59119$	$y=30971$	$x=59141$	$y=30949$
$x=59149$	$y=30941$	$x=59159$	$y=30931$	$x=59197$	$y=30893$
$x=59209$	$y=30881$	$x=59219$	$y=30871$	$x=59221$	$y=30869$
$x=59239$	$y=30851$	$x=59273$	$y=30817$	$x=59281$	$y=30809$
$x=59333$	$y=30757$	$x=59377$	$y=30713$	$x=59387$	$y=30703$
$x=59393$	$y=30697$	$x=59419$	$y=30671$	$x=59441$	$y=30649$
$x=59447$	$y=30643$	$x=59453$	$y=30637$	$x=59497$	$y=30593$

$x=59513$	$y=30577$	$x=59561$	$y=30529$	$x=59581$	$y=30509$
$x=59621$	$y=30469$	$x=59659$	$y=30431$	$x=59663$	$y=30427$
$x=59699$	$y=30391$	$x=59723$	$y=30367$	$x=59743$	$y=30347$
$x=59771$	$y=30319$	$x=59797$	$y=30293$	$x=59879$	$y=30211$
$x=59887$	$y=30203$	$x=59921$	$y=30169$	$x=59929$	$y=30161$
$x=59951$	$y=30139$	$x=59957$	$y=30133$	$x=59971$	$y=30119$
$x=59981$	$y=30109$	$x=59999$	$y=30091$	$x=60077$	$y=30013$
$x=60101$	$y=29989$	$x=60107$	$y=29983$	$x=60169$	$y=29921$
$x=60209$	$y=29881$	$x=60217$	$y=29873$	$x=60223$	$y=29867$
$x=60257$	$y=29833$	$x=60271$	$y=29819$	$x=60331$	$y=29759$
$x=60337$	$y=29753$	$x=60373$	$y=29717$	$x=60427$	$y=29663$
$x=60449$	$y=29641$	$x=60457$	$y=29633$	$x=60509$	$y=29581$
$x=60521$	$y=29569$	$x=60589$	$y=29501$	$x=60607$	$y=29483$
$x=60617$	$y=29473$	$x=60637$	$y=29453$	$x=60647$	$y=29443$
$x=60661$	$y=29429$	$x=60679$	$y=29411$	$x=60689$	$y=29401$
$x=60703$	$y=29387$	$x=60727$	$y=29363$	$x=60757$	$y=29333$
$x=60763$	$y=29327$	$x=60779$	$y=29311$	$x=60793$	$y=29297$
$x=60821$	$y=29269$	$x=60859$	$y=29231$	$x=60869$	$y=29221$
$x=60889$	$y=29201$	$x=60899$	$y=29191$	$x=60917$	$y=29173$
$x=60923$	$y=29167$	$x=60937$	$y=29153$	$x=60943$	$y=29147$
$x=60953$	$y=29137$	$x=60961$	$y=29129$	$x=61027$	$y=29063$
$x=61031$	$y=29059$	$x=61057$	$y=29033$	$x=61129$	$y=28961$
$x=61141$	$y=28949$	$x=61169$	$y=28921$	$x=61211$	$y=28879$
$x=61223$	$y=28867$	$x=61231$	$y=28859$	$x=61253$	$y=28837$
$x=61283$	$y=28807$	$x=61297$	$y=28793$	$x=61331$	$y=28759$
$x=61339$	$y=28751$	$x=61379$	$y=28711$	$x=61403$	$y=28687$
$x=61441$	$y=28649$	$x=61463$	$y=28627$	$x=61469$	$y=28621$
$x=61471$	$y=28619$	$x=61483$	$y=28607$	$x=61487$	$y=28603$
$x=61493$	$y=28597$	$x=61511$	$y=28579$	$x=61519$	$y=28571$
$x=61543$	$y=28547$	$x=61553$	$y=28537$	$x=61613$	$y=28477$

$x=61627$	$y=28463$	$x=61643$	$y=28447$	$x=61651$	$y=28439$
$x=61657$	$y=28433$	$x=61681$	$y=28409$	$x=61687$	$y=28403$
$x=61703$	$y=28387$	$x=61781$	$y=28309$	$x=61813$	$y=28277$
$x=61861$	$y=28229$	$x=61871$	$y=28219$	$x=61879$	$y=28211$
$x=61909$	$y=28181$	$x=61927$	$y=28163$	$x=61967$	$y=28123$
$x=61979$	$y=28111$	$x=61981$	$y=28109$	$x=61991$	$y=28099$
$x=62003$	$y=28087$	$x=62039$	$y=28051$	$x=62071$	$y=28019$
$x=62129$	$y=27961$	$x=62137$	$y=27953$	$x=62143$	$y=27947$
$x=62171$	$y=27919$	$x=62189$	$y=27901$	$x=62207$	$y=27883$
$x=62273$	$y=27817$	$x=62297$	$y=27793$	$x=62299$	$y=27791$
$x=62311$	$y=27779$	$x=62323$	$y=27767$	$x=62327$	$y=27763$
$x=62347$	$y=27743$	$x=62351$	$y=27739$	$x=62401$	$y=27689$
$x=62417$	$y=27673$	$x=62459$	$y=27631$	$x=62473$	$y=27617$
$x=62507$	$y=27583$	$x=62539$	$y=27551$	$x=62549$	$y=27541$
$x=62563$	$y=27527$	$x=62581$	$y=27509$	$x=62603$	$y=27487$
$x=62633$	$y=27457$	$x=62653$	$y=27437$	$x=62659$	$y=27431$
$x=62683$	$y=27407$	$x=62723$	$y=27367$	$x=62753$	$y=27337$
$x=62761$	$y=27329$	$x=62791$	$y=27299$	$x=62819$	$y=27271$
$x=62851$	$y=27239$	$x=62981$	$y=27109$	$x=62983$	$y=27107$
$x=62987$	$y=27103$	$x=63029$	$y=27061$	$x=63031$	$y=27059$
$x=63059$	$y=27031$	$x=63073$	$y=27017$	$x=63079$	$y=27011$
$x=63097$	$y=26993$	$x=63103$	$y=26987$	$x=63131$	$y=26959$
$x=63197$	$y=26893$	$x=63199$	$y=26891$	$x=63211$	$y=26879$
$x=63241$	$y=26849$	$x=63277$	$y=26813$	$x=63313$	$y=26777$
$x=63331$	$y=26759$	$x=63353$	$y=26737$	$x=63361$	$y=26729$
$x=63367$	$y=26723$	$x=63377$	$y=26713$	$x=63389$	$y=26701$
$x=63391$	$y=26699$	$x=63397$	$y=26693$	$x=63409$	$y=26681$
$x=63421$	$y=26669$	$x=63443$	$y=26647$	$x=63463$	$y=26627$
$x=63493$	$y=26597$	$x=63499$	$y=26591$	$x=63533$	$y=26557$
$x=63577$	$y=26513$	$x=63589$	$y=26501$	$x=63601$	$y=26489$

$x=63611 \ y=26479$	$x=63659 \ y=26431$	$x=63667 \ y=26423$
$x=63691 \ y=26399$	$x=63697 \ y=26393$	$x=63703 \ y=26387$
$x=63719 \ y=26371$	$x=63743 \ y=26347$	$x=63773 \ y=26317$
$x=63781 \ y=26309$	$x=63793 \ y=26297$	$x=63823 \ y=26267$
$x=63839 \ y=26251$	$x=63841 \ y=26249$	$x=63853 \ y=26237$
$x=63863 \ y=26227$	$x=63901 \ y=26189$	$x=63907 \ y=26183$
$x=63913 \ y=26177$	$x=63929 \ y=26161$	$x=63949 \ y=26141$
$x=63977 \ y=26113$	$x=64007 \ y=26083$	$x=64037 \ y=26053$
$x=64091 \ y=25999$	$x=64109 \ y=25981$	$x=64151 \ y=25939$
$x=64157 \ y=25933$	$x=64171 \ y=25919$	$x=64187 \ y=25903$
$x=64217 \ y=25873$	$x=64223 \ y=25867$	$x=64271 \ y=25819$
$x=64319 \ y=25771$	$x=64327 \ y=25763$	$x=64373 \ y=25717$
$x=64433 \ y=25657$	$x=64451 \ y=25639$	$x=64489 \ y=25601$
$x=64513 \ y=25577$	$x=64553 \ y=25537$	$x=64567 \ y=25523$
$x=64621 \ y=25469$	$x=64627 \ y=25463$	$x=64633 \ y=25457$
$x=64667 \ y=25423$	$x=64679 \ y=25411$	$x=64717 \ y=25373$
$x=64747 \ y=25343$	$x=64781 \ y=25309$	$x=64783 \ y=25307$
$x=64853 \ y=25237$	$x=64871 \ y=25219$	$x=64901 \ y=25189$
$x=64919 \ y=25171$	$x=64921 \ y=25169$	$x=64927 \ y=25163$
$x=64937 \ y=25153$	$x=64969 \ y=25121$	$x=65003 \ y=25087$
$x=65033 \ y=25057$	$x=65053 \ y=25037$	$x=65101 \ y=24989$
$x=65111 \ y=24979$	$x=65119 \ y=24971$	$x=65123 \ y=24967$
$x=65147 \ y=24943$	$x=65167 \ y=24923$	$x=65171 \ y=24919$
$x=65173 \ y=24917$	$x=65183 \ y=24907$	$x=65213 \ y=24877$
$x=65239 \ y=24851$	$x=65269 \ y=24821$	$x=65309 \ y=24781$
$x=65323 \ y=24767$	$x=65327 \ y=24763$	$x=65357 \ y=24733$
$x=65381 \ y=24709$	$x=65393 \ y=24697$	$x=65407 \ y=24683$
$x=65413 \ y=24677$	$x=65419 \ y=24671$	$x=65479 \ y=24611$
$x=65497 \ y=24593$	$x=65519 \ y=24571$	$x=65539 \ y=24551$
$x=65543 \ y=24547$	$x=65557 \ y=24533$	$x=65563 \ y=24527$

$x=65581$	$y=24509$	$x=65609$	$y=24481$	$x=65617$	$y=24473$
$x=65647$	$y=24443$	$x=65651$	$y=24439$	$x=65677$	$y=24413$
$x=65699$	$y=24391$	$x=65717$	$y=24373$	$x=65719$	$y=24371$
$x=65731$	$y=24359$	$x=65761$	$y=24329$	$x=65809$	$y=24281$
$x=65839$	$y=24251$	$x=65843$	$y=24247$	$x=65851$	$y=24239$
$x=65867$	$y=24223$	$x=65921$	$y=24169$	$x=65957$	$y=24133$
$x=65981$	$y=24109$	$x=65983$	$y=24107$	$x=65993$	$y=24097$
$x=66029$	$y=24061$	$x=66041$	$y=24049$	$x=66047$	$y=24043$
$x=66067$	$y=24023$	$x=66071$	$y=24019$	$x=66083$	$y=24007$
$x=66089$	$y=24001$	$x=66109$	$y=23981$	$x=66161$	$y=23929$
$x=66173$	$y=23917$	$x=66179$	$y=23911$	$x=66191$	$y=23899$
$x=66221$	$y=23869$	$x=66271$	$y=23819$	$x=66301$	$y=23789$
$x=66337$	$y=23753$	$x=66343$	$y=23747$	$x=66347$	$y=23743$
$x=66403$	$y=23687$	$x=66413$	$y=23677$	$x=66457$	$y=23633$
$x=66463$	$y=23627$	$x=66467$	$y=23623$	$x=66491$	$y=23599$
$x=66509$	$y=23581$	$x=66523$	$y=23567$	$x=66529$	$y=23561$
$x=66533$	$y=23557$	$x=66541$	$y=23549$	$x=66553$	$y=23537$
$x=66593$	$y=23497$	$x=66617$	$y=23473$	$x=66643$	$y=23447$
$x=66721$	$y=23369$	$x=66733$	$y=23357$	$x=66751$	$y=23339$
$x=66763$	$y=23327$	$x=66797$	$y=23293$	$x=66821$	$y=23269$
$x=66863$	$y=23227$	$x=66889$	$y=23201$	$x=66923$	$y=23167$
$x=66931$	$y=23159$	$x=66947$	$y=23143$	$x=66959$	$y=23131$
$x=66973$	$y=23117$	$x=67003$	$y=23087$	$x=67033$	$y=23057$
$x=67049$	$y=23041$	$x=67061$	$y=23029$	$x=67073$	$y=23017$
$x=67079$	$y=23011$	$x=67129$	$y=22961$	$x=67153$	$y=22937$
$x=67169$	$y=22921$	$x=67189$	$y=22901$	$x=67213$	$y=22877$
$x=67219$	$y=22871$	$x=67231$	$y=22859$	$x=67273$	$y=22817$
$x=67307$	$y=22783$	$x=67339$	$y=22751$	$x=67349$	$y=22741$
$x=67369$	$y=22721$	$x=67391$	$y=22699$	$x=67399$	$y=22691$
$x=67411$	$y=22679$	$x=67421$	$y=22669$	$x=67447$	$y=22643$

$x=67453$	$y=22637$	$x=67477$	$y=22613$	$x=67523$	$y=22567$
$x=67547$	$y=22543$	$x=67559$	$y=22531$	$x=67579$	$y=22511$
$x=67589$	$y=22501$	$x=67607$	$y=22483$	$x=67699$	$y=22391$
$x=67709$	$y=22381$	$x=67723$	$y=22367$	$x=67741$	$y=22349$
$x=67783$	$y=22307$	$x=67807$	$y=22283$	$x=67819$	$y=22271$
$x=67843$	$y=22247$	$x=67901$	$y=22189$	$x=67931$	$y=22159$
$x=67933$	$y=22157$	$x=67943$	$y=22147$	$x=67957$	$y=22133$
$x=67961$	$y=22129$	$x=67967$	$y=22123$	$x=67979$	$y=22111$
$x=68023$	$y=22067$	$x=68053$	$y=22037$	$x=68059$	$y=22031$
$x=68087$	$y=22003$	$x=68099$	$y=21991$	$x=68113$	$y=21977$
$x=68147$	$y=21943$	$x=68161$	$y=21929$	$x=68209$	$y=21881$
$x=68219$	$y=21871$	$x=68227$	$y=21863$	$x=68239$	$y=21851$
$x=68351$	$y=21739$	$x=68389$	$y=21701$	$x=68443$	$y=21647$
$x=68473$	$y=21617$	$x=68477$	$y=21613$	$x=68489$	$y=21601$
$x=68491$	$y=21599$	$x=68501$	$y=21589$	$x=68521$	$y=21569$
$x=68531$	$y=21559$	$x=68567$	$y=21523$	$x=68597$	$y=21493$
$x=68683$	$y=21407$	$x=68699$	$y=21391$	$x=68711$	$y=21379$
$x=68713$	$y=21377$	$x=68743$	$y=21347$	$x=68749$	$y=21341$
$x=68767$	$y=21323$	$x=68771$	$y=21319$	$x=68777$	$y=21313$
$x=68813$	$y=21277$	$x=68821$	$y=21269$	$x=68863$	$y=21227$
$x=68879$	$y=21211$	$x=68897$	$y=21193$	$x=68899$	$y=21191$
$x=68903$	$y=21187$	$x=68927$	$y=21163$	$x=68947$	$y=21143$
$x=69001$	$y=21089$	$x=69029$	$y=21061$	$x=69031$	$y=21059$
$x=69067$	$y=21023$	$x=69073$	$y=21017$	$x=69109$	$y=20981$
$x=69127$	$y=20963$	$x=69143$	$y=20947$	$x=69151$	$y=20939$
$x=69191$	$y=20899$	$x=69193$	$y=20897$	$x=69203$	$y=20887$
$x=69233$	$y=20857$	$x=69317$	$y=20773$	$x=69337$	$y=20753$
$x=69341$	$y=20749$	$x=69371$	$y=20719$	$x=69383$	$y=20707$
$x=69427$	$y=20663$	$x=69463$	$y=20627$	$x=69491$	$y=20599$
$x=69497$	$y=20593$	$x=69539$	$y=20551$	$x=69557$	$y=20533$

$x=69691$	$y=20399$	$x=69697$	$y=20393$	$x=69737$	$y=20353$
$x=69763$	$y=20327$	$x=69767$	$y=20323$	$x=69821$	$y=20269$
$x=69829$	$y=20261$	$x=69857$	$y=20233$	$x=69859$	$y=20231$
$x=69929$	$y=20161$	$x=69941$	$y=20149$	$x=70001$	$y=20089$
$x=70019$	$y=20071$	$x=70039$	$y=20051$	$x=70061$	$y=20029$
$x=70067$	$y=20023$	$x=70079$	$y=20011$	$x=70099$	$y=19991$
$x=70111$	$y=19979$	$x=70117$	$y=19973$	$x=70141$	$y=19949$
$x=70163$	$y=19927$	$x=70177$	$y=19913$	$x=70199$	$y=19891$
$x=70201$	$y=19889$	$x=70223$	$y=19867$	$x=70229$	$y=19861$
$x=70237$	$y=19853$	$x=70249$	$y=19841$	$x=70271$	$y=19819$
$x=70289$	$y=19801$	$x=70297$	$y=19793$	$x=70313$	$y=19777$
$x=70327$	$y=19763$	$x=70351$	$y=19739$	$x=70373$	$y=19717$
$x=70381$	$y=19709$	$x=70393$	$y=19697$	$x=70429$	$y=19661$
$x=70481$	$y=19609$	$x=70487$	$y=19603$	$x=70507$	$y=19583$
$x=70537$	$y=19553$	$x=70549$	$y=19541$	$x=70583$	$y=19507$
$x=70589$	$y=19501$	$x=70607$	$y=19483$	$x=70619$	$y=19471$
$x=70621$	$y=19469$	$x=70627$	$y=19463$	$x=70657$	$y=19433$
$x=70663$	$y=19427$	$x=70667$	$y=19423$	$x=70687$	$y=19403$
$x=70709$	$y=19381$	$x=70717$	$y=19373$	$x=70823$	$y=19267$
$x=70841$	$y=19249$	$x=70853$	$y=19237$	$x=70877$	$y=19213$
$x=70879$	$y=19211$	$x=70949$	$y=19141$	$x=70951$	$y=19139$
$x=70969$	$y=19121$	$x=71011$	$y=19079$	$x=71039$	$y=19051$
$x=71059$	$y=19031$	$x=71081$	$y=19009$	$x=71089$	$y=19001$
$x=71143$	$y=18947$	$x=71171$	$y=18919$	$x=71191$	$y=18899$
$x=71287$	$y=18803$	$x=71293$	$y=18797$	$x=71317$	$y=18773$
$x=71333$	$y=18757$	$x=71341$	$y=18749$	$x=71347$	$y=18743$
$x=71359$	$y=18731$	$x=71389$	$y=18701$	$x=71399$	$y=18691$
$x=71411$	$y=18679$	$x=71419$	$y=18671$	$x=71429$	$y=18661$
$x=71453$	$y=18637$	$x=71473$	$y=18617$	$x=71503$	$y=18587$
$x=71537$	$y=18553$	$x=71549$	$y=18541$	$x=71551$	$y=18539$

$x=71569$	$y=18521$	$x=71597$	$y=18493$	$x=71633$	$y=18457$
$x=71647$	$y=18443$	$x=71663$	$y=18427$	$x=71693$	$y=18397$
$x=71711$	$y=18379$	$x=71719$	$y=18371$	$x=71761$	$y=18329$
$x=71777$	$y=18313$	$x=71789$	$y=18301$	$x=71821$	$y=18269$
$x=71837$	$y=18253$	$x=71861$	$y=18229$	$x=71867$	$y=18223$
$x=71879$	$y=18211$	$x=71899$	$y=18191$	$x=71909$	$y=18181$
$x=71941$	$y=18149$	$x=71947$	$y=18143$	$x=71963$	$y=18127$
$x=71971$	$y=18119$	$x=71993$	$y=18097$	$x=72031$	$y=18059$
$x=72043$	$y=18047$	$x=72047$	$y=18043$	$x=72077$	$y=18013$
$x=72101$	$y=17989$	$x=72103$	$y=17987$	$x=72109$	$y=17981$
$x=72161$	$y=17929$	$x=72167$	$y=17923$	$x=72169$	$y=17921$
$x=72227$	$y=17863$	$x=72251$	$y=17839$	$x=72253$	$y=17837$
$x=72307$	$y=17783$	$x=72341$	$y=17749$	$x=72353$	$y=17737$
$x=72383$	$y=17707$	$x=72421$	$y=17669$	$x=72431$	$y=17659$
$x=72467$	$y=17623$	$x=72481$	$y=17609$	$x=72493$	$y=17597$
$x=72551$	$y=17539$	$x=72613$	$y=17477$	$x=72623$	$y=17467$
$x=72647$	$y=17443$	$x=72671$	$y=17419$	$x=72673$	$y=17417$
$x=72689$	$y=17401$	$x=72701$	$y=17389$	$x=72707$	$y=17383$
$x=72739$	$y=17351$	$x=72763$	$y=17327$	$x=72797$	$y=17293$
$x=72859$	$y=17231$	$x=72883$	$y=17207$	$x=72901$	$y=17189$
$x=72907$	$y=17183$	$x=72923$	$y=17167$	$x=72931$	$y=17159$
$x=72953$	$y=17137$	$x=72973$	$y=17117$	$x=72997$	$y=17093$
$x=73013$	$y=17077$	$x=73037$	$y=17053$	$x=73043$	$y=17047$
$x=73061$	$y=17029$	$x=73063$	$y=17027$	$x=73079$	$y=17011$
$x=73127$	$y=16963$	$x=73189$	$y=16901$	$x=73259$	$y=16831$
$x=73303$	$y=16787$	$x=73327$	$y=16763$	$x=73331$	$y=16759$
$x=73361$	$y=16729$	$x=73387$	$y=16703$	$x=73417$	$y=16673$
$x=73433$	$y=16657$	$x=73459$	$y=16631$	$x=73471$	$y=16619$
$x=73483$	$y=16607$	$x=73517$	$y=16573$	$x=73523$	$y=16567$
$x=73529$	$y=16561$	$x=73561$	$y=16529$	$x=73571$	$y=16519$

$x=73597$	$y=16493$	$x=73609$	$y=16481$	$x=73613$	$y=16477$
$x=73637$	$y=16453$	$x=73643$	$y=16447$	$x=73673$	$y=16417$
$x=73679$	$y=16411$	$x=73709$	$y=16381$	$x=73721$	$y=16369$
$x=73727$	$y=16363$	$x=73751$	$y=16339$	$x=73757$	$y=16333$
$x=73771$	$y=16319$	$x=73823$	$y=16267$	$x=73859$	$y=16231$
$x=73867$	$y=16223$	$x=73897$	$y=16193$	$x=73907$	$y=16183$
$x=73951$	$y=16139$	$x=73999$	$y=16091$	$x=74017$	$y=16073$
$x=74021$	$y=16069$	$x=74027$	$y=16063$	$x=74099$	$y=15991$
$x=74131$	$y=15959$	$x=74167$	$y=15923$	$x=74177$	$y=15913$
$x=74189$	$y=15901$	$x=74201$	$y=15889$	$x=74203$	$y=15887$
$x=74209$	$y=15881$	$x=74231$	$y=15859$	$x=74287$	$y=15803$
$x=74293$	$y=15797$	$x=74317$	$y=15773$	$x=74323$	$y=15767$
$x=74353$	$y=15737$	$x=74357$	$y=15733$	$x=74363$	$y=15727$
$x=74411$	$y=15679$	$x=74419$	$y=15671$	$x=74441$	$y=15649$
$x=74449$	$y=15641$	$x=74471$	$y=15619$	$x=74489$	$y=15601$
$x=74507$	$y=15583$	$x=74509$	$y=15581$	$x=74521$	$y=15569$
$x=74531$	$y=15559$	$x=74597$	$y=15493$	$x=74623$	$y=15467$
$x=74699$	$y=15391$	$x=74707$	$y=15383$	$x=74713$	$y=15377$
$x=74717$	$y=15373$	$x=74729$	$y=15361$	$x=74731$	$y=15359$
$x=74759$	$y=15331$	$x=74761$	$y=15329$	$x=74771$	$y=15319$
$x=74821$	$y=15269$	$x=74827$	$y=15263$	$x=74831$	$y=15259$
$x=74857$	$y=15233$	$x=74873$	$y=15217$	$x=74891$	$y=15199$
$x=74897$	$y=15193$	$x=74903$	$y=15187$	$x=74929$	$y=15161$
$x=74941$	$y=15149$	$x=74959$	$y=15131$	$x=75013$	$y=15077$
$x=75017$	$y=15073$	$x=75029$	$y=15061$	$x=75037$	$y=15053$
$x=75133$	$y=14957$	$x=75161$	$y=14929$	$x=75167$	$y=14923$
$x=75193$	$y=14897$	$x=75211$	$y=14879$	$x=75223$	$y=14867$
$x=75239$	$y=14851$	$x=75269$	$y=14821$	$x=75277$	$y=14813$
$x=75307$	$y=14783$	$x=75323$	$y=14767$	$x=75337$	$y=14753$
$x=75353$	$y=14737$	$x=75367$	$y=14723$	$x=75377$	$y=14713$

$x=75391$	$y=14699$	$x=75407$	$y=14683$	$x=75437$	$y=14653$
$x=75527$	$y=14563$	$x=75533$	$y=14557$	$x=75539$	$y=14551$
$x=75541$	$y=14549$	$x=75553$	$y=14537$	$x=75557$	$y=14533$
$x=75571$	$y=14519$	$x=75611$	$y=14479$	$x=75629$	$y=14461$
$x=75641$	$y=14449$	$x=75653$	$y=14437$	$x=75659$	$y=14431$
$x=75679$	$y=14411$	$x=75683$	$y=14407$	$x=75689$	$y=14401$
$x=75703$	$y=14387$	$x=75721$	$y=14369$	$x=75743$	$y=14347$
$x=75767$	$y=14323$	$x=75787$	$y=14303$	$x=75797$	$y=14293$
$x=75869$	$y=14221$	$x=75883$	$y=14207$	$x=75913$	$y=14177$
$x=75931$	$y=14159$	$x=75937$	$y=14153$	$x=75941$	$y=14149$
$x=75983$	$y=14107$	$x=76003$	$y=14087$	$x=76039$	$y=14051$
$x=76079$	$y=14011$	$x=76081$	$y=14009$	$x=76091$	$y=13999$
$x=76123$	$y=13967$	$x=76157$	$y=13933$	$x=76159$	$y=13931$
$x=76207$	$y=13883$	$x=76213$	$y=13877$	$x=76231$	$y=13859$
$x=76249$	$y=13841$	$x=76259$	$y=13831$	$x=76261$	$y=13829$
$x=76283$	$y=13807$	$x=76333$	$y=13757$	$x=76367$	$y=13723$
$x=76369$	$y=13721$	$x=76379$	$y=13711$	$x=76403$	$y=13687$
$x=76421$	$y=13669$	$x=76441$	$y=13649$	$x=76463$	$y=13627$
$x=76471$	$y=13619$	$x=76493$	$y=13597$	$x=76537$	$y=13553$
$x=76603$	$y=13487$	$x=76649$	$y=13441$	$x=76673$	$y=13417$
$x=76679$	$y=13411$	$x=76753$	$y=13337$	$x=76777$	$y=13313$
$x=76781$	$y=13309$	$x=76831$	$y=13259$	$x=76871$	$y=13219$
$x=76873$	$y=13217$	$x=76907$	$y=13183$	$x=76913$	$y=13177$
$x=76919$	$y=13171$	$x=76943$	$y=13147$	$x=76963$	$y=13127$
$x=76991$	$y=13099$	$x=77041$	$y=13049$	$x=77047$	$y=13043$
$x=77081$	$y=13009$	$x=77137$	$y=12953$	$x=77167$	$y=12923$
$x=77171$	$y=12919$	$x=77191$	$y=12899$	$x=77201$	$y=12889$
$x=77237$	$y=12853$	$x=77249$	$y=12841$	$x=77261$	$y=12829$
$x=77267$	$y=12823$	$x=77269$	$y=12821$	$x=77291$	$y=12799$
$x=77347$	$y=12743$	$x=77351$	$y=12739$	$x=77369$	$y=12721$

$x=77377$	$y=12713$	$x=77419$	$y=12671$	$x=77431$	$y=12659$
$x=77471$	$y=12619$	$x=77477$	$y=12613$	$x=77479$	$y=12611$
$x=77489$	$y=12601$	$x=77513$	$y=12577$	$x=77521$	$y=12569$
$x=77543$	$y=12547$	$x=77549$	$y=12541$	$x=77551$	$y=12539$
$x=77563$	$y=12527$	$x=77573$	$y=12517$	$x=77587$	$y=12503$
$x=77611$	$y=12479$	$x=77617$	$y=12473$	$x=77681$	$y=12409$
$x=77689$	$y=12401$	$x=77699$	$y=12391$	$x=77711$	$y=12379$
$x=77713$	$y=12377$	$x=77743$	$y=12347$	$x=77747$	$y=12343$
$x=77761$	$y=12329$	$x=77801$	$y=12289$	$x=77813$	$y=12277$
$x=77839$	$y=12251$	$x=77849$	$y=12241$	$x=77863$	$y=12227$
$x=77893$	$y=12197$	$x=77929$	$y=12161$	$x=77933$	$y=12157$
$x=77977$	$y=12113$	$x=77983$	$y=12107$	$x=78017$	$y=12073$
$x=78041$	$y=12049$	$x=78049$	$y=12041$	$x=78079$	$y=12011$
$x=78121$	$y=11969$	$x=78137$	$y=11953$	$x=78157$	$y=11933$
$x=78163$	$y=11927$	$x=78167$	$y=11923$	$x=78193$	$y=11897$
$x=78203$	$y=11887$	$x=78259$	$y=11831$	$x=78277$	$y=11813$
$x=78283$	$y=11807$	$x=78301$	$y=11789$	$x=78307$	$y=11783$
$x=78311$	$y=11779$	$x=78347$	$y=11743$	$x=78401$	$y=11689$
$x=78497$	$y=11593$	$x=78511$	$y=11579$	$x=78539$	$y=11551$
$x=78541$	$y=11549$	$x=78571$	$y=11519$	$x=78593$	$y=11497$
$x=78607$	$y=11483$	$x=78623$	$y=11467$	$x=78643$	$y=11447$
$x=78653$	$y=11437$	$x=78691$	$y=11399$	$x=78697$	$y=11393$
$x=78707$	$y=11383$	$x=78721$	$y=11369$	$x=78737$	$y=11353$
$x=78779$	$y=11311$	$x=78791$	$y=11299$	$x=78803$	$y=11287$
$x=78839$	$y=11251$	$x=78877$	$y=11213$	$x=78893$	$y=11197$
$x=78919$	$y=11171$	$x=78929$	$y=11161$	$x=78941$	$y=11149$
$x=78977$	$y=11113$	$x=79031$	$y=11059$	$x=79043$	$y=11047$
$x=79063$	$y=11027$	$x=79087$	$y=11003$	$x=79103$	$y=10987$
$x=79111$	$y=10979$	$x=79133$	$y=10957$	$x=79151$	$y=10939$
$x=79153$	$y=10937$	$x=79181$	$y=10909$	$x=79187$	$y=10903$

$x=79201$	$y=10889$	$x=79229$	$y=10861$	$x=79231$	$y=10859$
$x=79259$	$y=10831$	$x=79301$	$y=10789$	$x=79309$	$y=10781$
$x=79319$	$y=10771$	$x=79337$	$y=10753$	$x=79357$	$y=10733$
$x=79367$	$y=10723$	$x=79379$	$y=10711$	$x=79399$	$y=10691$
$x=79423$	$y=10667$	$x=79427$	$y=10663$	$x=79433$	$y=10657$
$x=79451$	$y=10639$	$x=79493$	$y=10597$	$x=79531$	$y=10559$
$x=79559$	$y=10531$	$x=79561$	$y=10529$	$x=79589$	$y=10501$
$x=79613$	$y=10477$	$x=79627$	$y=10463$	$x=79631$	$y=10459$
$x=79633$	$y=10457$	$x=79657$	$y=10433$	$x=79691$	$y=10399$
$x=79699$	$y=10391$	$x=79757$	$y=10333$	$x=79769$	$y=10321$
$x=79777$	$y=10313$	$x=79801$	$y=10289$	$x=79817$	$y=10273$
$x=79823$	$y=10267$	$x=79843$	$y=10247$	$x=79847$	$y=10243$
$x=79867$	$y=10223$	$x=79939$	$y=10151$	$x=79979$	$y=10111$
$x=79987$	$y=10103$	$x=79997$	$y=10093$	$x=79999$	$y=10091$
$x=80021$	$y=10069$	$x=80051$	$y=10039$	$x=80141$	$y=09949$
$x=80149$	$y=09941$	$x=80167$	$y=09923$	$x=80207$	$y=09883$
$x=80231$	$y=09859$	$x=80233$	$y=09857$	$x=80239$	$y=09851$
$x=80251$	$y=09839$	$x=80273$	$y=09817$	$x=80279$	$y=09811$
$x=80287$	$y=09803$	$x=80309$	$y=09781$	$x=80341$	$y=09749$
$x=80347$	$y=09743$	$x=80369$	$y=09721$	$x=80429$	$y=09661$
$x=80447$	$y=09643$	$x=80471$	$y=09619$	$x=80489$	$y=09601$
$x=80557$	$y=09533$	$x=80599$	$y=09491$	$x=80611$	$y=09479$
$x=80627$	$y=09463$	$x=80629$	$y=09461$	$x=80651$	$y=09439$
$x=80657$	$y=09433$	$x=80669$	$y=09421$	$x=80671$	$y=09419$
$x=80677$	$y=09413$	$x=80687$	$y=09403$	$x=80713$	$y=09377$
$x=80747$	$y=09343$	$x=80749$	$y=09341$	$x=80779$	$y=09311$
$x=80809$	$y=09281$	$x=80833$	$y=09257$	$x=80849$	$y=09241$
$x=80863$	$y=09227$	$x=80909$	$y=09181$	$x=80917$	$y=09173$
$x=80929$	$y=09161$	$x=80933$	$y=09157$	$x=80953$	$y=09137$
$x=80963$	$y=09127$	$x=81023$	$y=09067$	$x=81031$	$y=09059$

$x=81041$	$y=09049$	$x=81047$	$y=09043$	$x=81049$	$y=09041$
$x=81077$	$y=09013$	$x=81083$	$y=09007$	$x=81119$	$y=08971$
$x=81157$	$y=08933$	$x=81197$	$y=08893$	$x=81203$	$y=08887$
$x=81223$	$y=08867$	$x=81283$	$y=08807$	$x=81307$	$y=08783$
$x=81343$	$y=08747$	$x=81349$	$y=08741$	$x=81353$	$y=08737$
$x=81359$	$y=08731$	$x=81371$	$y=08719$	$x=81401$	$y=08689$
$x=81409$	$y=08681$	$x=81421$	$y=08669$	$x=81463$	$y=08627$
$x=81509$	$y=08581$	$x=81517$	$y=08573$	$x=81527$	$y=08563$
$x=81547$	$y=08543$	$x=81551$	$y=08539$	$x=81553$	$y=08537$
$x=81563$	$y=08527$	$x=81569$	$y=08521$	$x=81629$	$y=08461$
$x=81647$	$y=08443$	$x=81667$	$y=08423$	$x=81671$	$y=08419$
$x=81701$	$y=08389$	$x=81703$	$y=08387$	$x=81727$	$y=08363$
$x=81737$	$y=08353$	$x=81761$	$y=08329$	$x=81773$	$y=08317$
$x=81799$	$y=08291$	$x=81817$	$y=08273$	$x=81847$	$y=08243$
$x=81853$	$y=08237$	$x=81869$	$y=08221$	$x=81899$	$y=08191$
$x=81919$	$y=08171$	$x=81929$	$y=08161$	$x=81943$	$y=08147$
$x=81967$	$y=08123$	$x=81973$	$y=08117$	$x=82003$	$y=08087$
$x=82009$	$y=08081$	$x=82021$	$y=08069$	$x=82031$	$y=08059$
$x=82037$	$y=08053$	$x=82051$	$y=08039$	$x=82073$	$y=08017$
$x=82139$	$y=07951$	$x=82141$	$y=07949$	$x=82153$	$y=07937$
$x=82163$	$y=07927$	$x=82171$	$y=07919$	$x=82183$	$y=07907$
$x=82189$	$y=07901$	$x=82207$	$y=07883$	$x=82217$	$y=07873$
$x=82223$	$y=07867$	$x=82237$	$y=07853$	$x=82261$	$y=07829$
$x=82267$	$y=07823$	$x=82301$	$y=07789$	$x=82349$	$y=07741$
$x=82373$	$y=07717$	$x=82387$	$y=07703$	$x=82421$	$y=07669$
$x=82469$	$y=07621$	$x=82483$	$y=07607$	$x=82487$	$y=07603$
$x=82499$	$y=07591$	$x=82507$	$y=07583$	$x=82529$	$y=07561$
$x=82531$	$y=07559$	$x=82549$	$y=07541$	$x=82561$	$y=07529$
$x=82567$	$y=07523$	$x=82591$	$y=07499$	$x=82601$	$y=07489$
$x=82609$	$y=07481$	$x=82613$	$y=07477$	$x=82633$	$y=07457$

$x=82657 \ y=07433$	$x=82721 \ y=07369$	$x=82757 \ y=07333$
$x=82759 \ y=07331$	$x=82781 \ y=07309$	$x=82793 \ y=07297$
$x=82837 \ y=07253$	$x=82847 \ y=07243$	$x=82883 \ y=07207$
$x=82903 \ y=07187$	$x=82913 \ y=07177$	$x=82939 \ y=07151$
$x=82963 \ y=07127$	$x=82981 \ y=07109$	$x=83047 \ y=07043$
$x=83063 \ y=07027$	$x=83071 \ y=07019$	$x=83077 \ y=07013$
$x=83089 \ y=07001$	$x=83093 \ y=06997$	$x=83207 \ y=06883$
$x=83219 \ y=06871$	$x=83221 \ y=06869$	$x=83227 \ y=06863$
$x=83233 \ y=06857$	$x=83257 \ y=06833$	$x=83267 \ y=06823$
$x=83299 \ y=06791$	$x=83311 \ y=06779$	$x=83357 \ y=06733$
$x=83389 \ y=06701$	$x=83399 \ y=06691$	$x=83401 \ y=06689$
$x=83417 \ y=06673$	$x=83431 \ y=06659$	$x=83437 \ y=06653$
$x=83471 \ y=06619$	$x=83537 \ y=06553$	$x=83561 \ y=06529$
$x=83609 \ y=06481$	$x=83617 \ y=06473$	$x=83621 \ y=06469$
$x=83639 \ y=06451$	$x=83641 \ y=06449$	$x=83663 \ y=06427$
$x=83701 \ y=06389$	$x=83717 \ y=06373$	$x=83737 \ y=06353$
$x=83761 \ y=06329$	$x=83773 \ y=06317$	$x=83791 \ y=06299$
$x=83813 \ y=06277$	$x=83833 \ y=06257$	$x=83843 \ y=06247$
$x=83869 \ y=06221$	$x=83873 \ y=06217$	$x=83891 \ y=06199$
$x=83939 \ y=06151$	$x=83969 \ y=06121$	$x=84011 \ y=06079$
$x=84017 \ y=06073$	$x=84047 \ y=06043$	$x=84053 \ y=06037$
$x=84061 \ y=06029$	$x=84137 \ y=05953$	$x=84163 \ y=05927$
$x=84211 \ y=05879$	$x=84221 \ y=05869$	$x=84223 \ y=05867$
$x=84229 \ y=05861$	$x=84239 \ y=05851$	$x=84247 \ y=05843$
$x=84263 \ y=05827$	$x=84299 \ y=05791$	$x=84307 \ y=05783$
$x=84347 \ y=05743$	$x=84349 \ y=05741$	$x=84389 \ y=05701$
$x=84401 \ y=05689$	$x=84407 \ y=05683$	$x=84421 \ y=05669$
$x=84431 \ y=05659$	$x=84437 \ y=05653$	$x=84443 \ y=05647$
$x=84449 \ y=05641$	$x=84467 \ y=05623$	$x=84499 \ y=05591$
$x=84509 \ y=05581$	$x=84521 \ y=05569$	$x=84533 \ y=05557$

$x=84559$	$y=05531$	$x=84589$	$y=05501$	$x=84649$	$y=05441$
$x=84653$	$y=05437$	$x=84659$	$y=05431$	$x=84673$	$y=05417$
$x=84691$	$y=05399$	$x=84697$	$y=05393$	$x=84787$	$y=05303$
$x=84793$	$y=05297$	$x=84809$	$y=05281$	$x=84811$	$y=05279$
$x=84857$	$y=05233$	$x=84859$	$y=05231$	$x=84919$	$y=05171$
$x=84977$	$y=05113$	$x=84991$	$y=05099$	$x=85009$	$y=05081$
$x=85081$	$y=05009$	$x=85087$	$y=05003$	$x=85091$	$y=04999$
$x=85103$	$y=04987$	$x=85121$	$y=04969$	$x=85133$	$y=04957$
$x=85147$	$y=04943$	$x=85159$	$y=04931$	$x=85201$	$y=04889$
$x=85213$	$y=04877$	$x=85229$	$y=04861$	$x=85259$	$y=04831$
$x=85297$	$y=04793$	$x=85303$	$y=04787$	$x=85331$	$y=04759$
$x=85361$	$y=04729$	$x=85369$	$y=04721$	$x=85411$	$y=04679$
$x=85427$	$y=04663$	$x=85439$	$y=04651$	$x=85447$	$y=04643$
$x=85451$	$y=04639$	$x=85453$	$y=04637$	$x=85469$	$y=04621$
$x=85487$	$y=04603$	$x=85523$	$y=04567$	$x=85571$	$y=04519$
$x=85577$	$y=04513$	$x=85597$	$y=04493$	$x=85607$	$y=04483$
$x=85627$	$y=04463$	$x=85639$	$y=04451$	$x=85643$	$y=04447$
$x=85667$	$y=04423$	$x=85669$	$y=04421$	$x=85717$	$y=04373$
$x=85733$	$y=04357$	$x=85751$	$y=04339$	$x=85793$	$y=04297$
$x=85817$	$y=04273$	$x=85819$	$y=04271$	$x=85829$	$y=04261$
$x=85831$	$y=04259$	$x=85837$	$y=04253$	$x=85847$	$y=04243$
$x=85889$	$y=04201$	$x=85931$	$y=04159$	$x=85933$	$y=04157$
$x=85991$	$y=04099$	$x=85999$	$y=04091$	$x=86011$	$y=04079$
$x=86017$	$y=04073$	$x=86069$	$y=04021$	$x=86077$	$y=04013$
$x=86083$	$y=04007$	$x=86143$	$y=03947$	$x=86161$	$y=03929$
$x=86171$	$y=03919$	$x=86179$	$y=03911$	$x=86183$	$y=03907$
$x=86201$	$y=03889$	$x=86209$	$y=03881$	$x=86239$	$y=03851$
$x=86243$	$y=03847$	$x=86257$	$y=03833$	$x=86269$	$y=03821$
$x=86287$	$y=03803$	$x=86293$	$y=03797$	$x=86297$	$y=03793$
$x=86311$	$y=03779$	$x=86323$	$y=03767$	$x=86351$	$y=03739$

$x=86357$	$y=03733$	$x=86371$	$y=03719$	$x=86381$	$y=03709$
$x=86389$	$y=03701$	$x=86399$	$y=03691$	$x=86413$	$y=03677$
$x=86453$	$y=03637$	$x=86467$	$y=03623$	$x=86477$	$y=03613$
$x=86509$	$y=03581$	$x=86531$	$y=03559$	$x=86533$	$y=03557$
$x=86561$	$y=03529$	$x=86573$	$y=03517$	$x=86579$	$y=03511$
$x=86599$	$y=03491$	$x=86627$	$y=03463$	$x=86629$	$y=03461$
$x=86677$	$y=03413$	$x=86719$	$y=03371$	$x=86729$	$y=03361$
$x=86743$	$y=03347$	$x=86767$	$y=03323$	$x=86771$	$y=03319$
$x=86783$	$y=03307$	$x=86837$	$y=03253$	$x=86861$	$y=03229$
$x=86869$	$y=03221$	$x=86923$	$y=03167$	$x=86927$	$y=03163$
$x=86969$	$y=03121$	$x=86981$	$y=03109$	$x=87011$	$y=03079$
$x=87041$	$y=03049$	$x=87049$	$y=03041$	$x=87071$	$y=03019$
$x=87119$	$y=02971$	$x=87121$	$y=02969$	$x=87133$	$y=02957$
$x=87151$	$y=02939$	$x=87181$	$y=02909$	$x=87187$	$y=02903$
$x=87211$	$y=02879$	$x=87253$	$y=02837$	$x=87257$	$y=02833$
$x=87293$	$y=02797$	$x=87299$	$y=02791$	$x=87313$	$y=02777$
$x=87323$	$y=02767$	$x=87337$	$y=02753$	$x=87359$	$y=02731$
$x=87383$	$y=02707$	$x=87403$	$y=02687$	$x=87407$	$y=02683$
$x=87427$	$y=02663$	$x=87433$	$y=02657$	$x=87443$	$y=02647$
$x=87473$	$y=02617$	$x=87481$	$y=02609$	$x=87511$	$y=02579$
$x=87539$	$y=02551$	$x=87541$	$y=02549$	$x=87547$	$y=02543$
$x=87559$	$y=02531$	$x=87587$	$y=02503$	$x=87613$	$y=02477$
$x=87623$	$y=02467$	$x=87631$	$y=02459$	$x=87643$	$y=02447$
$x=87649$	$y=02441$	$x=87679$	$y=02411$	$x=87691$	$y=02399$
$x=87697$	$y=02393$	$x=87701$	$y=02389$	$x=87719$	$y=02371$
$x=87739$	$y=02351$	$x=87743$	$y=02347$	$x=87751$	$y=02339$
$x=87793$	$y=02297$	$x=87797$	$y=02293$	$x=87803$	$y=02287$
$x=87853$	$y=02237$	$x=87869$	$y=02221$	$x=87877$	$y=02213$
$x=87887$	$y=02203$	$x=87911$	$y=02179$	$x=87959$	$y=02131$
$x=87961$	$y=02129$	$x=87977$	$y=02113$	$x=87991$	$y=02099$

$x=88001$	$y=02089$	$x=88003$	$y=02087$	$x=88007$	$y=02083$
$x=88037$	$y=02053$	$x=88079$	$y=02011$	$x=88093$	$y=01997$
$x=88117$	$y=01973$	$x=88177$	$y=01913$	$x=88211$	$y=01879$
$x=88223$	$y=01867$	$x=88259$	$y=01831$	$x=88289$	$y=01801$
$x=88301$	$y=01789$	$x=88337$	$y=01753$	$x=88397$	$y=01693$
$x=88423$	$y=01667$	$x=88427$	$y=01663$	$x=88463$	$y=01627$
$x=88469$	$y=01621$	$x=88471$	$y=01619$	$x=88493$	$y=01597$
$x=88523$	$y=01567$	$x=88547$	$y=01543$	$x=88591$	$y=01499$
$x=88607$	$y=01483$	$x=88609$	$y=01481$	$x=88643$	$y=01447$
$x=88651$	$y=01439$	$x=88657$	$y=01433$	$x=88661$	$y=01429$
$x=88663$	$y=01427$	$x=88667$	$y=01423$	$x=88681$	$y=01409$
$x=88729$	$y=01361$	$x=88771$	$y=01319$	$x=88789$	$y=01301$
$x=88793$	$y=01297$	$x=88799$	$y=01291$	$x=88801$	$y=01289$
$x=88807$	$y=01283$	$x=88811$	$y=01279$	$x=88813$	$y=01277$
$x=88853$	$y=01237$	$x=88861$	$y=01229$	$x=88867$	$y=01223$
$x=88873$	$y=01217$	$x=88897$	$y=01193$	$x=88903$	$y=01187$
$x=88919$	$y=01171$	$x=88937$	$y=01153$	$x=88993$	$y=01097$
$x=88997$	$y=01093$	$x=89003$	$y=01087$	$x=89021$	$y=01069$
$x=89041$	$y=01049$	$x=89051$	$y=01039$	$x=89057$	$y=01033$
$x=89069$	$y=01021$	$x=89071$	$y=01019$	$x=89107$	$y=00983$
$x=89113$	$y=00977$	$x=89119$	$y=00971$	$x=89123$	$y=00967$
$x=89137$	$y=00953$	$x=89153$	$y=00937$	$x=89203$	$y=00887$
$x=89209$	$y=00881$	$x=89213$	$y=00877$	$x=89227$	$y=00863$
$x=89231$	$y=00859$	$x=89237$	$y=00853$	$x=89261$	$y=00829$
$x=89269$	$y=00821$	$x=89293$	$y=00797$	$x=89303$	$y=00787$
$x=89317$	$y=00773$	$x=89329$	$y=00761$	$x=89363$	$y=00727$
$x=89371$	$y=00719$	$x=89381$	$y=00709$	$x=89399$	$y=00691$
$x=89413$	$y=00677$	$x=89417$	$y=00673$	$x=89431$	$y=00659$
$x=89443$	$y=00647$	$x=89449$	$y=00641$	$x=89459$	$y=00631$
$x=89477$	$y=00613$	$x=89491$	$y=00599$	$x=89513$	$y=00577$

$x=89519 \ y=00571$	$x=89521 \ y=00569$	$x=89527 \ y=00563$
$x=89533 \ y=00557$	$x=89567 \ y=00523$	$x=89591 \ y=00499$
$x=89599 \ y=00491$	$x=89603 \ y=00487$	$x=89611 \ y=00479$
$x=89627 \ y=00463$	$x=89633 \ y=00457$	$x=89657 \ y=00433$
$x=89659 \ y=00431$	$x=89669 \ y=00421$	$x=89671 \ y=00419$
$x=89681 \ y=00409$	$x=89689 \ y=00401$	$x=89753 \ y=00337$
$x=89759 \ y=00331$	$x=89779 \ y=00311$	$x=89783 \ y=00307$

从集合 PB 中求得的解的个数为: 32

通过 PB 集合求得的素数对:

$x=00017 \ y=90073$	$x=00019 \ y=90071$	$x=00023 \ y=90067$
$x=00031 \ y=90059$	$x=00037 \ y=90053$	$x=00059 \ y=90031$
$x=00067 \ y=90023$	$x=00071 \ y=90019$	$x=00073 \ y=90017$
$x=00079 \ y=90011$	$x=00083 \ y=90007$	$x=00089 \ y=90001$
$x=00101 \ y=89989$	$x=00107 \ y=89983$	$x=00113 \ y=89977$
$x=00127 \ y=89963$	$x=00131 \ y=89959$	$x=00151 \ y=89939$
$x=00167 \ y=89923$	$x=00173 \ y=89917$	$x=00181 \ y=89909$
$x=00191 \ y=89899$	$x=00193 \ y=89897$	$x=00199 \ y=89891$
$x=00223 \ y=89867$	$x=00241 \ y=89849$	$x=00251 \ y=89839$
$x=00257 \ y=89833$	$x=00269 \ y=89821$	$x=00271 \ y=89819$
$x=00281 \ y=89809$	$x=00293 \ y=89797$	

偶数 90090 的满足哥德巴赫猜想的全解的个数共计: 2135 对

第三章 偶数表为二素数之差

这个问题是与哥德巴赫猜想相对应的另一种偶数表示形式, 其中隐含了广义孪生素数猜想(差值为任一偶数的素数对皆有无穷多组)的内容, 至今尚未得到证明。下文将对这一问题进行讨论。

3.1 求解证明

设, A 为大于 80 000 的任意大偶数, 将不超过 nA 的全部正整数集合用 E 表示。

以埃氏 (Eratosthenes) 筛法求得不超过 $(nA)^{1/2}$ 的全部素数集合 P , 并将集合 P 中元素按数值大小顺序排列如下:

$$P = (p_1, p_2, \dots, p_r)$$

$$2 = p_1 < p_2 < \dots < p_r \leq (nA)^{1/2} \quad (1)$$

$n \geq 2$ n 为自选的正整数

将不超过 nA 且大于 $A + p_r$ 的全部正整数集合用 N 表示,

$N = (A + p_r + 1, A + p_r + 2, \dots, nA)$, 则集合 N 的基数为

$$|N| = nA - (A + p_r) = (n-1)A - p_r \quad (2)$$

以集合 P 中各元素为模数, 求得同余式组:

$$A \equiv A_i \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (3)$$

A_i 为非负的最小剩余

用筛选方法从集合 N 中分选出必要的子集。

给定筛选条件:

$$g \not\equiv 0 \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (4)$$

$$g \not\equiv A_i \pmod{p_i}, \quad i=1, 2, \dots, r \quad (5)$$

g 表示集合 N 中被选元素。

从集合 N 中将同时符合 (4), (5) 式筛选条件的所有元素分选出来, 组成子集 N_B , 再来讨论子集 N_B 的基数 $|N_B|$ (筛函数)。

3.1.1 求证筛函数的下界

已知, 被筛集合 N 为自然数列集合, 模数集合 P 中元素为互不相同的素数。根据第一章中给出的相关公式 (61) 式可知, $|N_B|$ 的近似估算公式为

$$|N_B| = |N| \prod_{i=1}^r \left(\frac{\alpha_i}{p_i} \right) \quad (6)$$

根据第一章的 (72) 式可知, $|N_B|$ 的下界计算式为

$$|N_B| > |N| \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{p_i}{|N|} \right) \left(\frac{\alpha_i}{p_i} \right) \quad (7)$$

式中 α_i 为按照筛选条件所选取的模 p_i 的同余类子集的个数, 下面具体分析确定 α_i 的数值。

当 $i=1$ 时, 筛选条件 (4), (5) 式即为

$$g \not\equiv 0 \pmod{p_1} \quad (8)$$

$$g \not\equiv A_1 \pmod{p_1} \quad (9)$$

$p_1 = 2$, A 为偶数, 必然 $A_1 = 0$, 故知 (9) 式等同于 (8) 式, 二者变为一个筛选条件。由 (8) 式可知, 集合 N 中按模 p_1 只有模 p_1 的“1 同余类子集”符合筛选条件, 由此得

$$\alpha_1 = 1 \quad (10)$$

当 $i > 1$ 时, 可分两种情况:

其一, $i > 1$, 且 $A_i = 0$ 。将 $A_i = 0$ 代入筛选条件 (5) 式, 可见 (4) 式和 (5) 式完全等同, 即二者合为 (4) 式一个条件。由 (4) 式可知, 集合 N 中按模 p_i 只有模 p_i 的“0 同余类子集”不符合筛选条件。其余 $p_i - 1$ 个模 p_i 的同余类子集都能符合筛选条件, 故得

$$\alpha_i = p_i - 1 \quad (i > 1, A_i = 0) \quad (11)$$

其二, $i > 1$, 且 $A_i \neq 0$ 。此时, (4) 式和 (5) 式对应于两个不同的同余类子集。根据 (4)、(5) 式可知, 集合 N 中按模 p_i 只有模 p_i 的“0 同余类子集”和“ A_i 同余类子集”不符合筛选条件, 其余 $p_i - 2$ 个模 p_i 的同余类子集都能符合筛选条件。故得

$$\alpha_i = p_i - 2 \quad (i > 1, A_i \neq 0) \quad (12)$$

将 (11) 式和 (12) 式, 合并为下面一个统一的表示式:

$$\alpha_i = p_i - 2^{\delta_i} \quad (i > 1) \quad (13)$$

$$\delta_i = 0, (A_i = 0); \quad \delta_i = 1, (A_i \neq 0)$$

将 (10) 和 (13) 式代入 (6) 式, 得近似估算公式:

$$|N_B| = \frac{|N|}{2} \prod_{i=2}^r \left(\frac{p_i - 2^{\delta_i}}{p_i} \right) \quad (14)$$

$$\delta_i = 0, (A_i = 0); \quad \delta_i = 1, (A_i \neq 0)$$

将 (10) 和 (13) 式代入 (7) 式, 得下界计算公式:

$$|N_B| > F_1 \left(\frac{|N|}{2} \right) \prod_{i=2}^r \left(\frac{p_i - 2^{\delta_i}}{p_i} \right) \quad (15)$$

$$\delta_i = 0, (A_i = 0); \quad \delta_i = 1, (A_i \neq 0)$$

$$F_1 = \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{p_i}{|N|} \right) > 1 - \left(\frac{1}{|N|} \right) \sum_{i=1}^r p_i \quad (16)$$

由于 $F_1 > 0$, 根据第一章 (64) 式可将 (15) 式改写为

$$|N_B| > F_1 \left(\frac{|N|}{2} \right) \prod_{i=2}^r \left(\frac{p_i - 2}{p_i} \right) \quad (17)$$

由第一章 (77) 式可以推得

$$\Pi(x) - \Pi\left(\frac{x}{2}\right) < \Pi\left(\frac{x}{2}\right) \quad (18)$$

(18) 式表明, 数值越大的区域素数分布的密度越小。由此可得

$$\sum_{i=1}^r p_i < \left(\frac{1}{2}\right)(p_1 + p_r) \Pi(p_r) \quad (19)$$

根据切比晓夫不等式可知

$$\Pi(p_r) < 6 \ln 2 \left(\frac{p_r}{\ln p_r} \right) \quad (20)$$

(20) 式代入 (19) 式得

$$\sum_{i=1}^r p_i < \frac{3 \ln 2 (p_1 + p_r) p_r}{\ln p_r} \quad (21)$$

(21) 代入 (16) 式得

$$F_1 > 1 - \frac{3 \ln 2 (p_1 + p_r) p_r}{|N| \ln p_r} \quad (22)$$

将 (22) 式代入 (17) 式可得

$$|N_B| > \left\{ \frac{|N|}{2} - \frac{3 \ln 2 (p_1 + p_r) p_r}{2 \ln p_r} \right\} \prod_{i=2}^r \left(\frac{p_i - 2}{p_i} \right) \quad (23)$$

将 $|N|/2$ 作以下变换:

$$|N|/2 = (|N|/2) \{p_4 / (p_5 - 2)\} + |N| / (p_5 - 2) \quad (24)$$

$$|N|/2 = (|N|/2) \{p_5 / (p_6 - 2)\} \quad (25)$$

$$|N|/2 = (|N|/2)\{p_6/(p_7-2)\} + |N|/(p_7-2) \quad (26)$$

$$|N|/2 = (|N|/2)\{p_7/(p_8-2)\} \quad (27)$$

$$|N|/2 = (|N|/2)\{p_8/(p_9-2)\} + |N|/(p_9-2) \quad (28)$$

$$|N|/2 = (|N|/2)\{p_9/(p_{10}-2)\} + 2|N|/(p_{10}-2) \quad (29)$$

$$|N|/2 = (|N|/2)\{p_{10}/(p_{11}-2)\} \quad (30)$$

$$|N|/2 = (|N|/2)\{p_{11}/(p_{12}-2)\} + 2|N|/(p_{12}-2) \quad (31)$$

$$|N|/2 = (|N|/2)\{p_{12}/(p_{13}-2)\} + |N|/(p_{13}-2) \quad (32)$$

$$|N|/2 = (|N|/2)\{p_{13}/(p_{14}-2)\} \quad (33)$$

$$|N|/2 = (|N|/2)\{p_{14}/(p_{15}-2)\} + |N|/(p_{15}-2) \quad (34)$$

$$|N|/2 = (|N|/2)\{p_{15}/(p_{16}-2)\} + 2|N|/(p_{16}-2) \quad (35)$$

$$|N|/2 = (|N|/2)\{p_{16}/(p_{17}-2)\} + 2|N|/(p_{17}-2) \quad (36)$$

$$|N|/2 = (|N|/2)\{p_{17}/(p_{18}-2)\} \quad (37)$$

$$|N|/2 = (|N|/2)\{p_{18}/(p_{19}-2)\} + 2|N|/(p_{19}-2) \quad (38)$$

$$|N|/2 = (|N|/2)\{p_{19}/(p_{20}-2)\} + |N|/(p_{20}-2) \quad (39)$$

$$|N|/2 = (|N|/2)\{p_{20}/(p_{21}-2)\} \quad (40)$$

$$|N|/2 = (|N|/2)\{p_{21}/(p_{22}-2)\} + 2|N|/(p_{22}-2) \quad (41)$$

$$|N|/2 = (|N|/2)\{p_{22}/(p_{23}-2)\} + |N|/(p_{23}-2) \quad (42)$$

$$|N|/2 = (|N|/2)\{p_{23}/(p_{24}-2)\} + 2|N|/(p_{24}-2) \quad (43)$$

$$|N|/2 = (|N|/2)\{p_{24}/(p_{25}-2)\} + 3|N|/(p_{25}-2) \quad (44)$$

将 (24), (25) …… (44) 式逐次代入右端第一项, 可得

$$\frac{|N|}{2} = \frac{|N|}{2} \prod_{i=5}^{25} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2} \right) + F_2 \quad (45)$$

$$\begin{aligned}
F_2 = & \left(\frac{|N|}{p_5-2}\right) \prod_{i=6}^{25} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right) + \left(\frac{|N|}{p_7-2}\right) \prod_{i=8}^{25} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right) + \\
& \left(\frac{|N|}{p_9-2}\right) \prod_{i=10}^{25} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right) + \left(\frac{2|N|}{p_{10}-2}\right) \prod_{i=11}^{25} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right) + \\
& \left(\frac{2|N|}{p_{12}-2}\right) \prod_{i=13}^{25} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right) + \left(\frac{|N|}{p_{13}-2}\right) \prod_{i=14}^{25} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right) + \\
& \left(\frac{|N|}{p_{15}-2}\right) \prod_{i=16}^{25} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right) + \left(\frac{2|N|}{p_{16}-2}\right) \prod_{i=17}^{25} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right) + \\
& \left(\frac{2|N|}{p_{17}-2}\right) \prod_{i=18}^{25} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right) + \left(\frac{2|N|}{p_{19}-2}\right) \prod_{i=20}^{25} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right) + \\
& \left(\frac{|N|}{p_{20}-2}\right) \prod_{i=21}^{25} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right) + \left(\frac{2|N|}{p_{22}-2}\right) \prod_{i=23}^{25} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right) + \\
& \left(\frac{|N|}{p_{23}-2}\right) \prod_{i=24}^{25} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right) + \left(\frac{2|N|}{p_{24}-2}\right) \left(\frac{p_{24}}{p_{25}-2}\right) + \\
& \frac{3|N|}{p_{25}-2}
\end{aligned} \tag{46}$$

将 $P_5=11$, $P_6=13$, $P_7=17$, $P_8=19$, $P_9=23$, $P_{10}=29$,
 $P_{11}=31$, $P_{12}=37$, $P_{13}=41$, $P_{14}=43$, $P_{15}=47$, $P_{16}=53$,
 $P_{17}=59$, $P_{18}=61$, $P_{19}=67$, $P_{20}=71$, $P_{21}=73$, $P_{22}=79$,
 $P_{23}=83$, $P_{24}=89$, $P_{25}=97$ 代入 (46) 式求得:

$$F_2 = 0.3654|N| \tag{47}$$

将 (47) 式代入 (45) 式得

$$\frac{|N|}{2} = \frac{|N|}{2} \prod_{i=5}^{25} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right) + 0.3654|N| \tag{48}$$

将 (48) 式代入 (23) 式可得

$$|N_B| > \frac{|N|}{2} \prod_{j=5}^{25} \left(\frac{p_{j-1}}{p_j - 2} \right) \prod_{i=2}^r \left(\frac{p_i - 2}{p_i} \right) + F_3 \quad (49)$$

$$F_3 = \{0.3654|N| - \frac{3 \ln 2(p_1 + p_r) \dot{p}_r}{2 \ln p_r}\} \prod_{i=2}^r \left(\frac{p_i - 2}{p_i} \right) \quad (50)$$

由 (1) 式和 (2) 式可得

$$|N| \geq \left(\frac{n-1}{n} \right) p_r^2 - p_r \quad (51)$$

将 (51) 式代入 (50) 式得

$$F_3 = F_4 p_r \prod_{i=2}^r \left(\frac{p_i - 2}{p_i} \right) \quad (52)$$

$$F_4 = 0.3654 \left(\frac{n-1}{n} \right) p_r - 0.3654 - \frac{3 \ln 2(p_1 + p_r)}{2 \ln p_r} \quad (53)$$

$$\frac{dF_4}{dp_r} = 0.3654 \left(\frac{n-1}{n} \right) - 1.04 \left(\frac{\ln p_r - (p_1 + p_r)(1/p_r)}{\ln^2 p_r} \right) =$$

$$0.3654 \left(\frac{n-1}{n} \right) - \frac{1.04}{\ln p_r} + \frac{1.04(p_1 + p_r)}{p_r \ln^2 p_r} >$$

$$0.3654 \left(\frac{n-1}{n} \right) - \frac{1.04}{\ln p_r} \quad (54)$$

$$\text{令 } 0.3654 \left(\frac{n-1}{n} \right) - \frac{1.04}{\ln p_r} > 0$$

$$\text{得 } p_r > e^{2.846n/(n-1)} \quad (55)$$

将条件 (55) 式代入 (54) 式, 可得

$$\frac{dF_4}{dp_r} > 0, \quad p_r > e^{2.846n/(n-1)} \quad (56)$$

一般要求 $n \geq 2$, 故得

$$\frac{dF_4}{dp_r} > 0, \quad p_r > 296 \quad (57)$$

(57) 式表示, 当 $p_r > 296$ 时, F_4 为 p_r 的递增函数。

当 $A \geq 80\,000$ 时, $p_r \geq 397 > 296$

而且 $F_4(p_r = 397, n = 2) = 2.82$, 故知:

$$F_4 > 2.8, \quad A > 80\,000 \quad (58)$$

将 (58) 式代入 (52) 式可得

$$F_3 > 2.8 p_r \prod_{i=2}^r \left(\frac{p_i - 2}{p_i} \right) = \frac{2.8 p_r}{3} \prod_{i=3}^r \left(\frac{p_i - 2}{p_i} \right) \quad (59)$$

由于, $p_i - 2 \geq p_{i-1} \quad i \geq 3$ (60)

$$F_3 > \frac{2.8 p_r}{3} \prod_{i=3}^r \left(\frac{p_{i-1}}{p_i} \right) = 2.8 \quad (61)$$

将 (61) 式代入 (49) 式得

$$|N_B| > \frac{|N|}{2} \left(\frac{1}{3} \prod_{i=3}^r \left(\frac{p_{i-1}}{p_i} \right) + 2.8 \right) = \frac{|N|}{2 p_r} + 2.8 \quad (62)$$

将 (51) 式代入 (62) 式得

$$|N_B| > \left(\frac{n-1}{2n} \right) p_r - \frac{1}{2} + 2.8 > \left(\frac{n-1}{2n} \right) p_r \quad (63)$$

3.1.2 通过子集 N_B 求解

从集合 N_B 中任取一个元素 x , 再引入参量:

$$y = x - A \quad (64)$$

根据定义可知:

$$x \in E, \quad x > 1 \quad (65)$$

$$y \in E, \quad y > 1 \quad (66)$$

以集合 P 中各元素为模数求得同余式组:

$$x \equiv x_i \pmod{p_i}, \quad i=1,2,\dots,r$$

$$y \equiv y_i \pmod{p_i}, \quad i=1,2,\dots,r$$

已知 $x \in N_B$, 根据筛选条件 (4) 式可知:

$$x_i \neq 0, \quad i=1,2,\dots,r \quad (67)$$

根据 (5) 式可知,

$$x_i \neq A_i, \quad i=1,2,\dots,r \quad (68)$$

依据同余式的性质, 由 (64) 式可推得:

$$y_i \equiv x_i - A_i \pmod{p_i}, \quad i=1,2,\dots,r \quad (69)$$

由 (68) 和 (69) 式可知:

$$y_i \neq 0, \quad i=1,2,\dots,r \quad (70)$$

根据第一章引理 3: 由 (65) 和 (67) 式可知 x 为奇素数

根据第一章引理 3: 由 (66) 和 (70) 式可知 y 为奇素数

将 (64) 式移项可得

$$A = x - y \quad (71)$$

(71) 式即是我们所要求证的关系式。

x 为集合 N_B 中任一元素, 故集合 N_B 中每个元素都对应 (71) 式的一个解。考虑到推证过程中 (58) 式的限定条件可知:

大于 80 000 的任意大偶数都可表示为二个奇素数之差, 而且解的个数不少于 $(n-1)p_r/2n$ 个 (p_r 为不超过 $(nA)^{1/2}$ 的最大素数)。

3.2 解的无限性

已知, 集合 N_B 中每个元素都对应 (71) 式的一个解, 而集合 N_B 中元素个数的下界由 (63) 式可知:

$$|N_B| > \left(\frac{n-1}{2n}\right)p_r, \quad n \geq 2 \quad (72)$$

根据定义, p_r 为不超过 $(nA)^{1/2}$ 的最大素数。对于任意给定的偶数 A , 显然, 所选取的 n 值越大则 p_r 越大。由此可见, (72) 式右端的函数值, 必然随着自选参量 n 值的增大而增大, 当 n 趋于无穷时, (72) 式右端的函数值必定趋于无穷。故, 满足 (71) 式的解的个数可以有无穷多个。

3.3 小偶数的求证方法

实际上小于 80 000 的任意偶数同样可以表示为两个奇素数之差, 而且满足此条件的奇素数有无穷多对。其证明方法提示如下:

设 $2m$ 表示小于 80 000 的任意偶数。

A 为大于某选定数的任意正整数, 将不超过 A 的全部正整数集合用 E 表示。

再以埃氏筛法求得不超过 $A^{1/2}$ 的全部素数集合 P , 并将 P 中元素按数值大小顺序排列如下:

$$P = (p_1, p_2, \dots, p_r)$$

$$2 = p_1 < p_2 < \dots < p_r \leq A^{1/2}$$

用筛选方法从集合 E 中分选出必要的子集。

给定筛选条件:

$$g \not\equiv 0 \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$g \not\equiv 2m \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

g 表示集合 E 中被选元素

从集合 E 中将同时符合上述筛选条件的元素分选出来, 组成子集 E_B 。再来讨论子集 E_B 的基数 $|E_B|$ 。

不难证明, 子集 E_B 中不为 1 的元素的个数为

$$|E_B| - 1 > \frac{p_r}{2}$$

从集合 E_B 中任取一个数值不为 1 的元素 x 。

令

$$y = x - 2m$$

可以证明 x 和 y 都是奇素数。将上式移项可得

$$x - y = 2m$$

此式即是所要求证的关系式。

由于 x 和 y 都大于 $A^{1/2}$ 。故通过集合 E_B 求得的素数对全在区间 $(A^{1/2}, A)$ 之内。当选择求证区间按 $(A^{1/2}, A)$, (A, A^2) , (A^2, A^4) ……规律划分时, 每个区间所求的素数对都不重合。这样的区间有无穷多个, 自然差值为 $2m$ 的素数对必定有无穷多对。

有兴趣的读者可对全过程自行求证。

3.4 求解程序

下面是用 ASP 写的求解运算程序, 包括输入界面和运算显示两个文件:

第一个文件 (input.asp):

```
<html>
<head>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=
gb2312">
<LINK href="/style.css" type=text/css rel=stylesheet>
<title>任意大偶数可表为两个奇素数之差</title>
<script language="JavaScript" >
function suborno(){
var a=form1.a.value;
if(a=="")||a==null){
    alert("请输入偶数 A (10 以上)! ");
    return;
```



```
}else if(parseInt(a)%2!=0||parseInt(a)<10){
    alert("输入的偶数 A 必须是 10 以上的偶数! ");
    return;
}
var n=form1.n.value;
if(n=="||n==null){
    alert("请输入自选常数 n (2 以上)! ");
    return;
}else if(parseInt(n)<2){
    alert("输入的自选常数 n 必须是 2 以上的整数! ");
    return;
}
form1.submit();
}
</script>

</head>

<body bgcolor="#BFC0B6">
<p align="center"><font color="#FF0000" size="4"><strong>
任意大偶数可表为两个奇素数之差求解程序</strong></font>
</p>
<p align="center">&nbsp;</p>
<p align="center">&nbsp;</p>
<p align="center">如果您输入的偶数较大, 计算时间将会较长, 请耐心等待! </p>
<form name="form1" method="post" action="sievejs.asp">
    <table width="500" border="0" align="center" cellpadding="5" cellspacing="0">
        <tr>
```

```
<td width="201" align="right">请输入偶数 A(10 以上):</td>  
<td width="279"><input name="a" type="text" id="a"></td>  
</tr>  
  
<tr>  
    <td width="201" align="right">请输入自选常数 n (2 以  
上): </td>  
    <td width="279"><input name="n" type="text" id="n"></td>  
</tr>  
  
<tr>  
    <td align="center" colspan="2"><input type="button"  
name="Submit1" value="提交" onClick="javascript.suborno();">  
        &nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&~  
        <input type="reset" name="Submit2" value="重置"></td>  
</tr>  
</table>  
</form>  
  
<p align="center">&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&~</p>  
</body>  
</html>
```

第二个文件 (sievejs.asp):

```
<%a=clang(request.form("a"))
n=clang(request.form("n"))
%>
<html>
<head>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=
gb2312">
```

```

<LINK href="./style.css" type=text/css rel=stylesheet>
<title>任意大偶数可表为两个奇素数之差</title>
</head>
<body bgcolor="#BFC0B6"><br>&nbsp;<br>&nbsp;<br>&nbsp;<br>&nbsp;
<div align="center" id="wait_div"><font color="#FF0000"
size="4"><strong>如果出现提示“……是否取消该脚本？”，请
点击“否”，请耐心等待！</strong></font></div>
<div align="center" id="wait2_div" style="display:none"><font
color="#FF0000" size="5"><strong>任意大偶数可表为两个奇素数
之差求解运算结果</strong></font></div>
<p><script language="JavaScript">
var a,i,pi,j,flag,ni,n,m,x,y,k,pr,ther,num1,num2,num3;
//var array_ni = new Array();
var array_pi = new Array();
//var array_pi2 = new Array();
var array_n = new Array();
var array_ai = new Array();
//var array_hi = new Array();
//var array_pi_ni = new Array()
//a=clng(request.form("a"))
//num1=0;
//num2=0;
//num3=0;
a=parseInt("<%=a%>");
n=parseInt("<%=n%>");
if (a<10 || a%2!=0 || n<2)
{
document.write("输入错误！");
} else {
document.write("<font color=#FF0000 size=4>输入的偶数 a 为：

```



```

        i++;
    }
}

ther=i;

var silinN=n*a;
for(j=0,i=a+array_pi[ther-1]+1;i<=silinN;i++,j++){
    array_n[j]=i;
    //alert(array_n[i]);
}
for(i=0;i<array_n.length;i++)
{
    for(k=0;k<array_pi.length;k++)
    {

        if((array_n[i]%array_pi[k]==0)||((array_n[i]%array_pi[k]=
=array_ai[k]))
        {
            array_n[i]=0;
            break;
        }

    }
}
}
x=0;
for(i=0;i<array_n.length;i++){
    if(array_n[i]>0)
        x++;
    //alert(array_n[i]);
}

```



```

        document.write("<br>");

    }
    m=m+1;
}

}

}

document.all("wait_div").style.display="none";
document.all("wait2_div").style.display="";
}
</script>
</p></body>
</html>

```

3.5 实筛数据

输入的偶数 a 为: 300 自选常数 $n=2$

从集合 N 中求得的解的个数为: 30

从集合 N 中求得的解:

$x=331 \ y=031$	$x=337 \ y=037$	$x=347 \ y=047$
$x=353 \ y=053$	$x=359 \ y=059$	$x=367 \ y=067$
$x=373 \ y=073$	$x=379 \ y=079$	$x=383 \ y=083$
$x=389 \ y=089$	$x=397 \ y=097$	$x=401 \ y=101$
$x=409 \ y=109$	$x=431 \ y=131$	$x=439 \ y=139$
$x=449 \ y=149$	$x=457 \ y=157$	$x=463 \ y=163$
$x=467 \ y=167$	$x=479 \ y=179$	$x=491 \ y=191$
$x=499 \ y=199$	$x=523 \ y=223$	$x=541 \ y=241$
$x=557 \ y=257$	$x=563 \ y=263$	$x=569 \ y=269$

$$x=571 \ y=271 \quad x=577 \ y=277 \quad x=593 \ y=293$$

输入的偶数 a 为: 300 自选常数 $n=10$

从集合 N 中求得的解的个数为: 183

从集合 N 中求得的解:

$$\begin{aligned}
 &x=359 \ y=059 \quad x=367 \ y=067 \quad x=373 \ y=073 \\
 &x=379 \ y=079 \quad x=383 \ y=083 \quad x=389 \ y=089 \\
 &x=397 \ y=097 \quad x=401 \ y=101 \quad x=409 \ y=109 \\
 &x=431 \ y=131 \quad x=439 \ y=139 \quad x=449 \ y=149 \\
 &x=457 \ y=157 \quad x=463 \ y=163 \quad x=467 \ y=167 \\
 &x=479 \ y=179 \quad x=491 \ y=191 \quad x=499 \ y=199 \\
 &x=523 \ y=223 \quad x=541 \ y=241 \quad x=557 \ y=257 \\
 &x=563 \ y=263 \quad x=569 \ y=269 \quad x=571 \ y=271 \\
 &x=577 \ y=277 \quad x=593 \ y=293 \quad x=607 \ y=307 \\
 &x=613 \ y=313 \quad x=617 \ y=317 \quad x=631 \ y=331 \\
 &x=647 \ y=347 \quad x=653 \ y=353 \quad x=659 \ y=359 \\
 &x=673 \ y=373 \quad x=683 \ y=383 \quad x=701 \ y=401 \\
 &x=709 \ y=409 \quad x=719 \ y=419 \quad x=733 \ y=433 \\
 &x=739 \ y=439 \quad x=743 \ y=443 \quad x=757 \ y=457 \\
 &x=761 \ y=461 \quad x=787 \ y=487 \quad x=809 \ y=509 \\
 &x=821 \ y=521 \quad x=823 \ y=523 \quad x=857 \ y=557 \\
 &x=863 \ y=563 \quad x=877 \ y=577 \quad x=887 \ y=587 \\
 &x=907 \ y=607 \quad x=919 \ y=619 \quad x=941 \ y=641 \\
 &x=947 \ y=647 \quad x=953 \ y=653 \quad x=977 \ y=677 \\
 &x=983 \ y=683 \quad x=991 \ y=691 \quad x=1009 \ y=709 \\
 &x=1019 \ y=719 \quad x=1033 \ y=733 \quad x=1039 \ y=739 \\
 &x=1051 \ y=751 \quad x=1061 \ y=761 \quad x=1069 \ y=769 \\
 &x=1087 \ y=787 \quad x=1097 \ y=797 \quad x=1109 \ y=809 \\
 &x=1123 \ y=823 \quad x=1129 \ y=829 \quad x=1153 \ y=853
 \end{aligned}$$

$x=1163$	$y=863$	$x=1181$	$y=881$	$x=1187$	$y=887$
$x=1229$	$y=929$	$x=1237$	$y=937$	$x=1277$	$y=977$
$x=1283$	$y=983$	$x=1291$	$y=991$	$x=1297$	$y=997$
$x=1319$	$y=1019$	$x=1321$	$y=1021$	$x=1361$	$y=1061$
$x=1409$	$y=1109$	$x=1423$	$y=1123$	$x=1429$	$y=1129$
$x=1451$	$y=1151$	$x=1453$	$y=1153$	$x=1471$	$y=1171$
$x=1481$	$y=1181$	$x=1487$	$y=1187$	$x=1493$	$y=1193$
$x=1523$	$y=1223$	$x=1531$	$y=1231$	$x=1549$	$y=1249$
$x=1559$	$y=1259$	$x=1579$	$y=1279$	$x=1583$	$y=1283$
$x=1597$	$y=1297$	$x=1601$	$y=1301$	$x=1607$	$y=1307$
$x=1619$	$y=1319$	$x=1621$	$y=1321$	$x=1627$	$y=1327$
$x=1667$	$y=1367$	$x=1699$	$y=1399$	$x=1709$	$y=1409$
$x=1723$	$y=1423$	$x=1733$	$y=1433$	$x=1747$	$y=1447$
$x=1753$	$y=1453$	$x=1759$	$y=1459$	$x=1783$	$y=1483$
$x=1787$	$y=1487$	$x=1789$	$y=1489$	$x=1811$	$y=1511$
$x=1823$	$y=1523$	$x=1831$	$y=1531$	$x=1867$	$y=1567$
$x=1871$	$y=1571$	$x=1879$	$y=1579$	$x=1901$	$y=1601$
$x=1907$	$y=1607$	$x=1913$	$y=1613$	$x=1993$	$y=1693$
$x=1997$	$y=1697$	$x=1999$	$y=1699$	$x=2053$	$y=1753$
$x=2083$	$y=1783$	$x=2087$	$y=1787$	$x=2089$	$y=1789$
$x=2111$	$y=1811$	$x=2131$	$y=1831$	$x=2161$	$y=1861$
$x=2179$	$y=1879$	$x=2207$	$y=1907$	$x=2213$	$y=1913$
$x=2251$	$y=1951$	$x=2273$	$y=1973$	$x=2287$	$y=1987$
$x=2293$	$y=1993$	$x=2297$	$y=1997$	$x=2311$	$y=2011$
$x=2339$	$y=2039$	$x=2381$	$y=2081$	$x=2383$	$y=2083$
$x=2389$	$y=2089$	$x=2399$	$y=2099$	$x=2411$	$y=2111$
$x=2437$	$y=2137$	$x=2441$	$y=2141$	$x=2503$	$y=2203$
$x=2521$	$y=2221$	$x=2539$	$y=2239$	$x=2543$	$y=2243$
$x=2551$	$y=2251$	$x=2593$	$y=2293$	$x=2609$	$y=2309$
$x=2633$	$y=2333$	$x=2647$	$y=2347$	$x=2657$	$y=2357$
$x=2671$	$y=2371$	$x=2677$	$y=2377$	$x=2683$	$y=2383$

$x=2689 \ y=2389$	$x=2693 \ y=2393$	$x=2699 \ y=2399$
$x=2711 \ y=2411$	$x=2741 \ y=2441$	$x=2767 \ y=2467$
$x=2777 \ y=2477$	$x=2803 \ y=2503$	$x=2843 \ y=2543$
$x=2851 \ y=2551$	$x=2857 \ y=2557$	$x=2879 \ y=2579$
$x=2909 \ y=2609$	$x=2917 \ y=2617$	$x=2957 \ y=2657$
$x=2963 \ y=2663$	$x=2971 \ y=2671$	$x=2999 \ y=2699$

输入的偶数 a 为: 5000 自选常数 $n=2$

从集合 N 中求得的解的个数为: 137

从集合 N 中求得的解:

$x=5101 \ y=0101$	$x=5107 \ y=0107$	$x=5113 \ y=0113$
$x=5167 \ y=0167$	$x=5179 \ y=0179$	$x=5197 \ y=0197$
$x=5227 \ y=0227$	$x=5233 \ y=0233$	$x=5281 \ y=0281$
$x=5347 \ y=0347$	$x=5419 \ y=0419$	$x=5431 \ y=0431$
$x=5443 \ y=0443$	$x=5449 \ y=0449$	$x=5479 \ y=0479$
$x=5503 \ y=0503$	$x=5521 \ y=0521$	$x=5557 \ y=0557$
$x=5563 \ y=0563$	$x=5569 \ y=0569$	$x=5641 \ y=0641$
$x=5647 \ y=0647$	$x=5653 \ y=0653$	$x=5659 \ y=0659$
$x=5683 \ y=0683$	$x=5701 \ y=0701$	$x=5743 \ y=0743$
$x=5821 \ y=0821$	$x=5827 \ y=0827$	$x=5839 \ y=0839$
$x=5857 \ y=0857$	$x=5881 \ y=0881$	$x=5953 \ y=0953$
$x=6091 \ y=1091$	$x=6151 \ y=1151$	$x=6163 \ y=1163$
$x=6217 \ y=1217$	$x=6229 \ y=1229$	$x=6277 \ y=1277$
$x=6301 \ y=1301$	$x=6361 \ y=1361$	$x=6367 \ y=1367$
$x=6373 \ y=1373$	$x=6427 \ y=1427$	$x=6451 \ y=1451$
$x=6481 \ y=1481$	$x=6553 \ y=1553$	$x=6571 \ y=1571$
$x=6607 \ y=1607$	$x=6619 \ y=1619$	$x=6637 \ y=1637$
$x=6709 \ y=1709$	$x=6733 \ y=1733$	$x=6823 \ y=1823$
$x=6871 \ y=1871$	$x=6907 \ y=1907$	$x=6949 \ y=1949$
$x=6997 \ y=1997$	$x=7027 \ y=2027$	$x=7039 \ y=2039$

$x=7069$	$y=2069$	$x=7129$	$y=2129$	$x=7207$	$y=2207$
$x=7213$	$y=2213$	$x=7237$	$y=2237$	$x=7243$	$y=2243$
$x=7297$	$y=2297$	$x=7309$	$y=2309$	$x=7333$	$y=2333$
$x=7351$	$y=2351$	$x=7393$	$y=2393$	$x=7411$	$y=2411$
$x=7417$	$y=2417$	$x=7459$	$y=2459$	$x=7477$	$y=2477$
$x=7549$	$y=2549$	$x=7591$	$y=2591$	$x=7621$	$y=2621$
$x=7687$	$y=2687$	$x=7699$	$y=2699$	$x=7741$	$y=2741$
$x=7753$	$y=2753$	$x=7789$	$y=2789$	$x=7879$	$y=2879$
$x=7927$	$y=2927$	$x=7963$	$y=2963$	$x=8011$	$y=3011$
$x=8089$	$y=3089$	$x=8167$	$y=3167$	$x=8191$	$y=3191$
$x=8209$	$y=3209$	$x=8221$	$y=3221$	$x=8329$	$y=3329$
$x=8389$	$y=3389$	$x=8461$	$y=3461$	$x=8467$	$y=3467$
$x=8527$	$y=3527$	$x=8539$	$y=3539$	$x=8581$	$y=3581$
$x=8623$	$y=3623$	$x=8677$	$y=3677$	$x=8719$	$y=3719$
$x=8761$	$y=3761$	$x=8779$	$y=3779$	$x=8803$	$y=3803$
$x=8821$	$y=3821$	$x=8863$	$y=3863$	$x=8923$	$y=3923$
$x=8929$	$y=3929$	$x=9001$	$y=4001$	$x=9007$	$y=4007$
$x=9013$	$y=4013$	$x=9049$	$y=4049$	$x=9091$	$y=4091$
$x=9127$	$y=4127$	$x=9133$	$y=4133$	$x=9157$	$y=4157$
$x=9241$	$y=4241$	$x=9283$	$y=4283$	$x=9337$	$y=4337$
$x=9349$	$y=4349$	$x=9391$	$y=4391$	$x=9397$	$y=4397$
$x=9421$	$y=4421$	$x=9463$	$y=4463$	$x=9547$	$y=4547$
$x=9643$	$y=4643$	$x=9649$	$y=4649$	$x=9679$	$y=4679$
$x=9721$	$y=4721$	$x=9733$	$y=4733$	$x=9787$	$y=4787$
$x=9817$	$y=4817$	$x=9871$	$y=4871$	$x=9931$	$y=4931$
$x=9967$	$y=4967$	$x=9973$	$y=4973$		

输入的偶数 a 为: 5000 自选常数 $n=3$

从集合 N 中求得的解的个数为: 238

从集合 N 中求得的解:

$x=5167 \ y=0167$	$x=5179 \ y=0179$	$x=5197 \ y=0197$
$x=5227 \ y=0227$	$x=5233 \ y=0233$	$x=5281 \ y=0281$
$x=5347 \ y=0347$	$x=5419 \ y=0419$	$x=5431 \ y=0431$
$x=5443 \ y=0443$	$x=5449 \ y=0449$	$x=5479 \ y=0479$
$x=5503 \ y=0503$	$x=5521 \ y=0521$	$x=5557 \ y=0557$
$x=5563 \ y=0563$	$x=5569 \ y=0569$	$x=5641 \ y=0641$
$x=5647 \ y=0647$	$x=5653 \ y=0653$	$x=5659 \ y=0659$
$x=5683 \ y=0683$	$x=5701 \ y=0701$	$x=5743 \ y=0743$
$x=5821 \ y=0821$	$x=5827 \ y=0827$	$x=5839 \ y=0839$
$x=5857 \ y=0857$	$x=5881 \ y=0881$	$x=5953 \ y=0953$
$x=6091 \ y=1091$	$x=6151 \ y=1151$	$x=6163 \ y=1163$
$x=6217 \ y=1217$	$x=6229 \ y=1229$	$x=6277 \ y=1277$
$x=6301 \ y=1301$	$x=6361 \ y=1361$	$x=6367 \ y=1367$
$x=6373 \ y=1373$	$x=6427 \ y=1427$	$x=6451 \ y=1451$
$x=6481 \ y=1481$	$x=6553 \ y=1553$	$x=6571 \ y=1571$
$x=6607 \ y=1607$	$x=6619 \ y=1619$	$x=6637 \ y=1637$
$x=6709 \ y=1709$	$x=6733 \ y=1733$	$x=6823 \ y=1823$
$x=6871 \ y=1871$	$x=6907 \ y=1907$	$x=6949 \ y=1949$
$x=6997 \ y=1997$	$x=7027 \ y=2027$	$x=7039 \ y=2039$
$x=7069 \ y=2069$	$x=7129 \ y=2129$	$x=7207 \ y=2207$
$x=7213 \ y=2213$	$x=7237 \ y=2237$	$x=7243 \ y=2243$
$x=7297 \ y=2297$	$x=7309 \ y=2309$	$x=7333 \ y=2333$
$x=7351 \ y=2351$	$x=7393 \ y=2393$	$x=7411 \ y=2411$
$x=7417 \ y=2417$	$x=7459 \ y=2459$	$x=7477 \ y=2477$
$x=7549 \ y=2549$	$x=7591 \ y=2591$	$x=7621 \ y=2621$
$x=7687 \ y=2687$	$x=7699 \ y=2699$	$x=7741 \ y=2741$
$x=7753 \ y=2753$	$x=7789 \ y=2789$	$x=7879 \ y=2879$
$x=7927 \ y=2927$	$x=7963 \ y=2963$	$x=8011 \ y=3011$
$x=8089 \ y=3089$	$x=8167 \ y=3167$	$x=8191 \ y=3191$

$x=8209$	$y=3209$	$x=8221$	$y=3221$	$x=8329$	$y=3329$
$x=8389$	$y=3389$	$x=8461$	$y=3461$	$x=8467$	$y=3467$
$x=8527$	$y=3527$	$x=8539$	$y=3539$	$x=8581$	$y=3581$
$x=8623$	$y=3623$	$x=8677$	$y=3677$	$x=8719$	$y=3719$
$x=8761$	$y=3761$	$x=8779$	$y=3779$	$x=8803$	$y=3803$
$x=8821$	$y=3821$	$x=8863$	$y=3863$	$x=8923$	$y=3923$
$x=8929$	$y=3929$	$x=9001$	$y=4001$	$x=9007$	$y=4007$
$x=9013$	$y=4013$	$x=9049$	$y=4049$	$x=9091$	$y=4091$
$x=9127$	$y=4127$	$x=9133$	$y=4133$	$x=9157$	$y=4157$
$x=9241$	$y=4241$	$x=9283$	$y=4283$	$x=9337$	$y=4337$
$x=9349$	$y=4349$	$x=9391$	$y=4391$	$x=9397$	$y=4397$
$x=9421$	$y=4421$	$x=9463$	$y=4463$	$x=9547$	$y=4547$
$x=9643$	$y=4643$	$x=9649$	$y=4649$	$x=9679$	$y=4679$
$x=9721$	$y=4721$	$x=9733$	$y=4733$	$x=9787$	$y=4787$
$x=9817$	$y=4817$	$x=9871$	$y=4871$	$x=9931$	$y=4931$
$x=9967$	$y=4967$	$x=9973$	$y=4973$	$x=10009$	$y=5009$
$x=10039$	$y=5039$	$x=10099$	$y=5099$	$x=10273$	$y=5273$
$x=10303$	$y=5303$	$x=10333$	$y=5333$	$x=10399$	$y=5399$
$x=10477$	$y=5477$	$x=10501$	$y=5501$	$x=10531$	$y=5531$
$x=10639$	$y=5639$	$x=10651$	$y=5651$	$x=10657$	$y=5657$
$x=10711$	$y=5711$	$x=10861$	$y=5861$	$x=10867$	$y=5867$
$x=10903$	$y=5903$	$x=10939$	$y=5939$	$x=10987$	$y=5987$
$x=11047$	$y=6047$	$x=11113$	$y=6113$	$x=11131$	$y=6131$
$x=11173$	$y=6173$	$x=11197$	$y=6197$	$x=11257$	$y=6257$
$x=11287$	$y=6287$	$x=11299$	$y=6299$	$x=11311$	$y=6311$
$x=11317$	$y=6317$	$x=11329$	$y=6329$	$x=11353$	$y=6353$
$x=11491$	$y=6491$	$x=11551$	$y=6551$	$x=11689$	$y=6689$
$x=11701$	$y=6701$	$x=11719$	$y=6719$	$x=11779$	$y=6779$
$x=11827$	$y=6827$	$x=11833$	$y=6833$	$x=11863$	$y=6863$
$x=11959$	$y=6959$	$x=11971$	$y=6971$	$x=12043$	$y=7043$

$x=12109$	$y=7109$	$x=12211$	$y=7211$	$x=12253$	$y=7253$
$x=12433$	$y=7433$	$x=12451$	$y=7451$	$x=12457$	$y=7457$
$x=12487$	$y=7487$	$x=12517$	$y=7517$	$x=12541$	$y=7541$
$x=12547$	$y=7547$	$x=12577$	$y=7577$	$x=12583$	$y=7583$
$x=12589$	$y=7589$	$x=12703$	$y=7703$	$x=12757$	$y=7757$
$x=12823$	$y=7823$	$x=12829$	$y=7829$	$x=12841$	$y=7841$
$x=12853$	$y=7853$	$x=12907$	$y=7907$	$x=12919$	$y=7919$
$x=13009$	$y=8009$	$x=13093$	$y=8093$	$x=13147$	$y=8147$
$x=13171$	$y=8171$	$x=13219$	$y=8219$	$x=13291$	$y=8291$
$x=13297$	$y=8297$	$x=13513$	$y=8513$	$x=13537$	$y=8537$
$x=13597$	$y=8597$	$x=13627$	$y=8627$	$x=13669$	$y=8669$
$x=13681$	$y=8681$	$x=13693$	$y=8693$	$x=13807$	$y=8807$
$x=13831$	$y=8831$	$x=13933$	$y=8933$	$x=13963$	$y=8963$
$x=13999$	$y=8999$	$x=14011$	$y=9011$	$x=14029$	$y=9029$
$x=14173$	$y=9173$	$x=14221$	$y=9221$	$x=14281$	$y=9281$
$x=14293$	$y=9293$	$x=14323$	$y=9323$	$x=14341$	$y=9341$
$x=14419$	$y=9419$	$x=14431$	$y=9431$	$x=14437$	$y=9437$
$x=14461$	$y=9461$	$x=14479$	$y=9479$	$x=14533$	$y=9533$
$x=14551$	$y=9551$	$x=14629$	$y=9629$	$x=14767$	$y=9767$
$x=14851$	$y=9851$	$x=14887$	$y=9887$	$x=14923$	$y=9923$
$x=14929$	$y=9929$				

第四章 含素因子 3, 5 的偶数

为了便于讨论首先引进如下定义。

孪生素数中值定义：孪生素数中所含两个素数之间的偶数（即两素数的算术平均值）称为该孪生素数的中值。

本章将要讨论的命题是，含素因子 3, 5 的偶数都可表为两个孪生素数中值之和。

4.1 求解证明

设, A 为含有素因子 3 和 5 的任意大偶数, 将不超过 A 的全部正整数集合用 E 表示, 则集合 E 的基数 $|E|$ 等于 A 。

以埃氏筛法求得不超过 $A^{1/2}$ 全部素数集合 P , 且将集合 P 中的元素按数值大小顺序排列如下, $P = (p_1, p_2, \dots, p_r)$

$$2 = p_1 < p_2 < \dots < p_r \leq A^{1/2} \quad (1)$$

A 为偶数, 故可用下式表示,

$$A = 2n \quad (n \text{ 为正整数}) \quad (2)$$

将大于 1 且不超过 $n+1$ 的全部正整数集合用 N 表示, 则集合 N 的基数 $|N|$ 等于 n

$$|N| = n \quad (3)$$

以集合 P 中元素为模数求得同余式组,

$$A \equiv A_i \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

A_i 为非负的最小剩余 (下同)。

用筛选方法从集合 N 中分选出必要的子集。

给定以下筛选条件:

$$g \not\equiv 0 \pmod{p_i} \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (4)$$

$$g \not\equiv 2 \pmod{p_i}, \quad i=1,2,\dots,r \quad (5)$$

$$g \not\equiv A_i \pmod{p_i}, \quad i=1,2,\dots,r \quad (6)$$

$$g \not\equiv A_i + 2 \pmod{p_i}, \quad i=1,2,\dots,r \quad (7)$$

g 表示集合 N 中被选元素。

从集合 N 中将同时符合 (4) (5) (6) (7) 式条件的元素分选出来, 组成子集 N_B , 再来讨论子集 N_B 的基数 $|N_B|$ (筛函数)。

4.1.1 求证筛函数的下界

集合 N 为自然数列集合, 模数集合 P 中的元素为互不相同的素数。根据第一章的相关公式 (61) 式可知, 基数 $|N_B|$ 的近似估算公式为

$$|N_B| = n \prod_{i=1}^r \left(\frac{\alpha_i}{p_i} \right) \quad (8)$$

根据第一章 (72) 式可知, 基数 $|N_B|$ 的下界计算公式为

$$|N_B| > n \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{p_i}{n} \right) \left(\frac{\alpha_i}{p_i} \right) \quad (9)$$

式中 α_i 为按照筛选条件所选取的模 p_i 的同余类子集的个数。下面来具体确定 α_i 的数值,

当 $i=1$ 时, $p_1=2$

A 为偶数, 故 $A_1=0$

由此知, (4), (5), (6), (7) 式四个筛选条件等价于下面的一个条件。

$$g \not\equiv 0 \pmod{p_1} \quad (10)$$

根据 (10) 式可知, 集合 N 中模 p_1 的“0 同余类子集”应该筛掉, 被选取的只有模 p_1 的“1 同余类子集”一个, 故得

$$\alpha_1=1 \quad (11)$$

当 $i=2$ 时, $p_2=3$

A 含素因子 3, 故 $A_2=0$

由此知, (4), (5), (6), (7) 式四个筛选条件合并为以下两个筛选条件。

$$g \not\equiv 0 \pmod{p_2} \quad (12)$$

$$g \not\equiv 2 \pmod{p_2} \quad (13)$$

依据 (12), (13) 式可知, 集合 N 中只有模 p_2 的“1 同余类子集”这一个子集被选取, 故得:

$$\alpha_2=1 \quad (14)$$

当 $i=3$ 时, $p_3=5$

A 含素因子 5, 故 $A_3=0$

同上, (4), (5), (6), (7) 式四个筛选条件合并为以下两个筛选条件:

$$g \not\equiv 0 \pmod{p_3} \quad (15)$$

$$g \not\equiv 2 \pmod{p_3} \quad (16)$$

根据 (15), (16) 式可知, 集合 N 中模 p_3 的“0 同余类子集”和“2 同余类子集”都不符合条件, 应当筛掉, 其余 3 个模 p_3 的同余类子集都符合筛选条件, 应被选取, 故得,

$$\alpha_3=3 \quad (17)$$

当 $i>3$ 时, 分以下三种情况,

其一, $A_i=0$, ($i>3$)

此时, (4), (5), (6), (7) 式四个筛选条件合并为以下两个筛选条件:

$$g \not\equiv 0 \pmod{p_i}, \quad i>3 \quad (18)$$

$$g \not\equiv 2 \pmod{p_i}, \quad i>3 \quad (19)$$

依据 (18), (19) 式可知, 集合 N 中除去模 p_i 的 “0 同余类子集” 和 “2 同余类子集” 外, 其余 $(p_i - 2)$ 个模 p_i 的同余类子集都符合筛选条件, 应被选取, 故得

$$\alpha_i = p_i - 2 \quad (A_i = 0, i > 3) \quad (20)$$

其二, $A_i = 2$ 或 $A_i = p_i - 2, i > 3$

此时, (4), (5), (6), (7) 式四个筛选条件合并为以下三个筛选条件:

$$g \not\equiv 0 \pmod{p_i}, \quad i > 3 \quad (21)$$

$$g \not\equiv 2 \pmod{p_i}, \quad i > 3 \quad (22)$$

$$g \not\equiv 4 \text{ 或 } p_i - 2 \pmod{p_i}, \quad i > 3 \quad (23)$$

依据 (21), (22), (23) 式可知, 集合 N 中除去模 p_i 的 “0 同余类子集” “2 同余类子集” 和 “(4 或 $p_i - 2$) 同余类子集” 外, 其余 $(p_i - 3)$ 个模 p_i 的同余类子集都符合筛选条件, 应被选取, 故得

$$\alpha_i = p_i - 3 \quad (A_i = 2 \text{ 或 } p_i - 2, i > 3) \quad (24)$$

其三, $A_i \neq 0, 2, p_i - 2 \quad (i > 3)$

此时, (4), (5), (6), (7) 式四个筛选条件不可合并, 由此四个条件可知, 集合 N 中除去模 p_i 的 “0 同余类子集” “2 同余类子集” “ A_i 同余类子集” 和 “($A_i + 2$) 同余类子集” 外, 其余 $(p_i - 4)$ 个模 p_i 的同余类子集都符合筛选条件, 应被选取, 故得

$$\alpha_i = p_i - 4 \quad (A_i \neq 0, 2, p_i - 2, i > 3) \quad (25)$$

令

$$\theta = \begin{cases} 2, A_i = 0 \\ 3, A_i = 2 \text{ 或 } p_i - 2 \\ 4, A_i \neq 0, 2, p_i - 2 \end{cases} \quad (26)$$

引入 θ 之后, 可将 (20), (24) 和 (25) 式合并

$$\alpha_i = p_i - \theta \quad i > 3 \quad (27)$$

将 (11), (14), (17) 和 (27) 式代入 (8) 式, 得基数 $|N_B|$ 的近似估算式为

$$|N_B| = \left(\frac{n}{10}\right) \prod_{i=4}^r \left(\frac{p_i - \theta}{p_i}\right) \quad (28)$$

将 (11), (14), (17) 和 (27) 式代入 (9) 式, 得基数 $|N_B|$ 的下界计算公式为

$$|N_B| > F_1 \left(\frac{n}{10}\right) \prod_{i=4}^r \left\{ \frac{p_i - \theta}{p_i} \right\} \quad (29)$$

$$F_1 = \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{p_i}{n}\right) > 1 - \left(\frac{1}{n}\right) \sum_{i=1}^r p_i \quad (30)$$

由于 $F_1 > 0$, 依据第一章 (64) 式, 可将 (29) 式改写为

$$|N_B| > F_1 \left(\frac{n}{10}\right) \prod_{i=4}^r \left(\frac{p_i - 4}{p_i}\right) \quad (31)$$

由第一章 (77) 式可以推得

$$\Pi(x) - \Pi\left(\frac{x}{2}\right) < \Pi\left(\frac{x}{2}\right) \quad (32)$$

(32) 式表示, 数值越大的区域素数分布的密度越小, 故得

$$\sum_{i=1}^r p_i < \left(\frac{1}{2}\right)(p_1 + p_r) \Pi(p_r) \quad (33)$$

根据切比晓夫不等式可知

$$\Pi(p_r) < 6 \ln 2 \left(\frac{p_r}{\ln p_r}\right) \quad (34)$$

由 (33) 式和 (34) 式可得

$$\sum_{i=1}^r p_i < \frac{2.08(p_1 + p_r)p_r}{\ln p_r} \quad (35)$$

由 (35) 式和 (30) 式可得

$$F_1 > 1 - \frac{2.08(p_1 + p_r)p_r}{n \ln p_r} \quad (36)$$

将 (36) 式代入 (31) 式, 得

$$|N_B| > \left\{ \left(\frac{n}{10} \right) - \frac{0.208(p_1 + p_r)p_r}{\ln p_r} \right\} \prod_{i=4}^r \left(\frac{p_i - 4}{p_i} \right) \quad (37)$$

将 $n/10$ 作以下变换

$$\frac{n}{10} = \left(\frac{n}{10} \right) \left(\frac{p_4}{p_6 - 4} \right) + \frac{2n}{10(p_6 - 4)} \quad (38)$$

$$\frac{n}{10} = \left(\frac{n}{10} \right) \left(\frac{p_5}{p_7 - 4} \right) + \frac{2n}{10(p_7 - 4)} \quad (39)$$

$$\frac{n}{10} = \left(\frac{n}{10} \right) \left(\frac{p_6}{p_8 - 4} \right) + \frac{2n}{10(p_8 - 4)} \quad (40)$$

$$\frac{n}{10} = \left(\frac{n}{10} \right) \left(\frac{p_7}{p_9 - 4} \right) + \frac{2n}{10(p_9 - 4)} \quad (41)$$

$$\frac{n}{10} = \left(\frac{n}{10} \right) \left(\frac{p_8}{p_{10} - 4} \right) + \frac{6n}{10(p_{10} - 4)} \quad (42)$$

$$\frac{n}{10} = \left(\frac{n}{10} \right) \left(\frac{p_9}{p_{11} - 4} \right) + \frac{4n}{10(p_{11} - 4)} \quad (43)$$

$$\frac{n}{10} = \left(\frac{n}{10} \right) \left(\frac{p_{10}}{p_{12} - 4} \right) + \frac{4n}{10(p_{12} - 4)} \quad (44)$$

$$\frac{n}{10} = \left(\frac{n}{10} \right) \left(\frac{p_{11}}{p_{13} - 4} \right) + \frac{6n}{10(p_{13} - 4)} \quad (45)$$

$$\frac{n}{10} = \left(\frac{n}{10} \right) \left(\frac{p_{12}}{p_{14} - 4} \right) + \frac{2n}{10(p_{14} - 4)} \quad (46)$$

$$\frac{n}{10} = \left(\frac{n}{10}\right)\left(\frac{p_{13}}{p_{15}-4}\right) + \frac{2n}{10(p_{15}-4)} \quad (47)$$

$$\frac{n}{10} = \left(\frac{n}{10}\right)\left(\frac{p_{14}}{p_{16}-4}\right) + \frac{6n}{10(p_{16}-4)} \quad (48)$$

$$\frac{n}{10} = \left(\frac{n}{10}\right)\left(\frac{p_{15}}{p_{17}-4}\right) + \frac{8n}{10(p_{17}-4)} \quad (49)$$

$$\frac{n}{10} = \left(\frac{n}{10}\right)\left(\frac{p_{16}}{p_{18}-4}\right) + \frac{4n}{10(p_{18}-4)} \quad (50)$$

$$\frac{n}{10} = \left(\frac{n}{10}\right)\left(\frac{p_{17}}{p_{19}-4}\right) + \frac{4n}{10(p_{19}-4)} \quad (51)$$

$$\frac{n}{10} = \left(\frac{n}{10}\right)\left(\frac{p_{18}}{p_{20}-4}\right) + \frac{6n}{10(p_{20}-4)} \quad (52)$$

$$\frac{n}{10} = \left(\frac{n}{10}\right)\left(\frac{p_{19}}{p_{21}-4}\right) + \frac{2n}{10(p_{21}-4)} \quad (53)$$

$$\frac{n}{10} = \left(\frac{n}{10}\right)\left(\frac{p_{20}}{p_{22}-4}\right) + \frac{4n}{10(p_{22}-4)} \quad (54)$$

$$\frac{n}{10} = \left(\frac{n}{10}\right)\left(\frac{p_{21}}{p_{23}-4}\right) + \frac{6n}{10(p_{23}-4)} \quad (55)$$

$$\frac{n}{10} = \left(\frac{n}{10}\right)\left(\frac{p_{22}}{p_{24}-4}\right) + \frac{6n}{10(p_{24}-4)} \quad (56)$$

$$\frac{n}{10} = \left(\frac{n}{10}\right)\left(\frac{p_{23}}{p_{25}-4}\right) + \frac{10n}{10(p_{25}-4)} \quad (57)$$

$$\frac{n}{10} = \left(\frac{n}{10}\right)\left(\frac{p_{24}}{p_{26}-4}\right) + \frac{8n}{10(p_{26}-4)} \quad (58)$$

$$\frac{n}{10} = \left(\frac{n}{10}\right)\left(\frac{p_{25}}{p_{27}-4}\right) + \frac{2n}{10(p_{27}-4)} \quad (59)$$

$$\frac{n}{10} = \left(\frac{n}{10}\right)\left(\frac{p_{26}}{p_{28}-4}\right) + \frac{2n}{10(p_{28}-4)} \quad (60)$$

$$\frac{n}{10} = \left(\frac{n}{10}\right)\left(\frac{p_{27}}{p_{29}-4}\right) + \frac{2n}{10(p_{29}-4)} \quad (61)$$

$$\frac{n}{10} = \left(\frac{n}{10}\right)\left(\frac{p_{28}}{p_{30}-4}\right) + \frac{2n}{10(p_{30}-4)} \quad (62)$$

$$\frac{n}{10} = \left(\frac{n}{10}\right)\left(\frac{p_{29}}{p_{31}-4}\right) + \frac{14n}{10(p_{31}-4)} \quad (63)$$

$$\frac{n}{10} = \left(\frac{n}{10}\right)\left(\frac{p_{30}}{p_{32}-4}\right) + \frac{14n}{10(p_{32}-4)} \quad (64)$$

$$\frac{n}{10} = \left(\frac{n}{10}\right)\left(\frac{p_{31}}{p_{33}-4}\right) + \frac{6n}{10(p_{33}-4)} \quad (65)$$

$$\frac{n}{10} = \left(\frac{n}{10}\right)\left(\frac{p_{32}}{p_{34}-4}\right) + \frac{4n}{10(p_{34}-4)} \quad (66)$$

$$\frac{n}{10} = \left(\frac{n}{10}\right)\left(\frac{p_{33}}{p_{35}-4}\right) + \frac{8n}{10(p_{35}-4)} \quad (67)$$

$$\frac{n}{10} = \left(\frac{n}{10}\right)\left(\frac{p_{34}}{p_{36}-4}\right) + \frac{8n}{10(p_{36}-4)} \quad (68)$$

$$\frac{n}{10} = \left(\frac{n}{10}\right)\left(\frac{p_{35}}{p_{37}-4}\right) + \frac{4n}{10(p_{37}-4)} \quad (69)$$

$$\frac{n}{10} = \left(\frac{n}{10}\right)\left(\frac{p_{36}}{p_{38}-4}\right) + \frac{8n}{10(p_{38}-4)} \quad (70)$$

$$\frac{n}{10} = \left(\frac{n}{10}\right)\left(\frac{p_{37}}{p_{39}-4}\right) + \frac{6n}{10(p_{39}-4)} \quad (71)$$

$$\frac{n}{10} = \left(\frac{n}{10}\right)\left(\frac{p_{38}}{p_{40}-4}\right) + \frac{6n}{10(p_{40}-4)} \quad (72)$$

$$\frac{n}{10} = \left(\frac{n}{10}\right)\left(\frac{p_{39}}{p_{41}-4}\right) + \frac{8n}{10(p_{41}-4)} \quad (73)$$

$$\frac{n}{10} = \left(\frac{n}{10}\right)\left(\frac{p_{40}}{p_{42}-4}\right) + \frac{4n}{10(p_{42}-4)} \quad (74)$$

$$\frac{n}{10} = \left(\frac{n}{10}\right)\left(\frac{p_{41}}{p_{43}-4}\right) + \frac{8n}{10(p_{43}-4)} \quad (75)$$

$$\frac{n}{10} = \left(\frac{n}{10}\right)\left(\frac{p_{42}}{p_{44}-4}\right) + \frac{8n}{10(p_{44}-4)} \quad (76)$$

$$\frac{n}{10} = \left(\frac{n}{10}\right)\left(\frac{p_{43}}{p_{45}-4}\right) + \frac{2n}{10(p_{45}-4)} \quad (77)$$

$$\frac{n}{10} = \left(\frac{n}{10}\right)\left(\frac{p_{44}}{p_{46}-4}\right) + \frac{2n}{10(p_{46}-4)} \quad (78)$$

$$\frac{n}{10} = \left(\frac{n}{10}\right)\left(\frac{p_{45}}{p_{47}-4}\right) + \frac{10n}{10(p_{47}-4)} \quad (79)$$

$$\frac{n}{10} = \left(\frac{n}{10}\right)\left(\frac{p_{46}}{p_{48}-4}\right) + \frac{20n}{10(p_{48}-4)} \quad (80)$$

$$\frac{n}{10} = \left(\frac{n}{10}\right)\left(\frac{p_{47}}{p_{49}-4}\right) + \frac{12n}{10(p_{49}-4)} \quad (81)$$

$$\frac{n}{10} = \left(\frac{n}{10}\right)\left(\frac{p_{48}}{p_{50}-4}\right) + \frac{2n}{10(p_{50}-4)} \quad (82)$$

将 (38), (39), …… , (82) 式逐次代入右端第一项可得

$$\frac{n}{10} = \left(\frac{n}{10}\right) \prod_{j=6}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + F_2 \quad (83)$$

$$\begin{aligned} F_2 = & \left\{ \frac{2n}{10(p_6-4)} \right\} \prod_{j=7}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \left\{ \frac{2n}{10(p_7-4)} \right\} \prod_{j=8}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \\ & \left\{ \frac{2n}{10(p_8-4)} \right\} \prod_{j=9}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \left\{ \frac{2n}{10(p_9-4)} \right\} \prod_{j=10}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \\ & \left\{ \frac{6n}{10(p_{10}-4)} \right\} \prod_{j=11}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \left\{ \frac{4n}{10(p_{11}-4)} \right\} \prod_{j=12}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \\ & \left\{ \frac{4n}{10(p_{12}-4)} \right\} \prod_{j=13}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \left\{ \frac{6n}{10(p_{13}-4)} \right\} \prod_{j=14}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{2n}{10(p_{14}-4)} \right\} \prod_{j=15}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4} \right) + \left\{ \frac{2n}{10(p_{15}-4)} \right\} \prod_{j=16}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4} \right) + \\
& \left\{ \frac{6n}{10(p_{16}-4)} \right\} \prod_{j=17}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4} \right) + \left\{ \frac{8n}{10(p_{17}-4)} \right\} \prod_{j=18}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4} \right) + \\
& \left\{ \frac{4n}{10(p_{18}-4)} \right\} \prod_{j=19}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4} \right) + \left\{ \frac{4n}{10(p_{19}-4)} \right\} \prod_{j=20}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4} \right) + \\
& \left\{ \frac{6n}{10(p_{20}-4)} \right\} \prod_{j=21}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4} \right) + \left\{ \frac{2n}{10(p_{21}-4)} \right\} \prod_{j=22}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4} \right) + \\
& \left\{ \frac{4n}{10(p_{22}-4)} \right\} \prod_{j=23}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4} \right) + \left\{ \frac{6n}{10(p_{23}-4)} \right\} \prod_{j=24}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4} \right) + \\
& \left\{ \frac{6n}{10(p_{24}-4)} \right\} \prod_{j=25}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4} \right) + \left\{ \frac{10n}{10(p_{25}-4)} \right\} \prod_{j=26}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4} \right) + \\
& \left\{ \frac{8n}{10(p_{26}-4)} \right\} \prod_{j=27}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4} \right) + \left\{ \frac{2n}{10(p_{27}-4)} \right\} \prod_{j=28}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4} \right) + \\
& \left\{ \frac{2n}{10(p_{28}-4)} \right\} \prod_{j=29}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4} \right) + \left\{ \frac{2n}{10(p_{29}-4)} \right\} \prod_{j=30}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4} \right) + \\
& \left\{ \frac{2n}{10(p_{30}-4)} \right\} \prod_{j=31}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4} \right) + \left\{ \frac{14n}{10(p_{31}-4)} \right\} \prod_{j=32}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4} \right) + \\
& \left\{ \frac{14n}{10(p_{32}-4)} \right\} \prod_{j=33}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4} \right) + \left\{ \frac{6n}{10(p_{33}-4)} \right\} \prod_{j=34}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4} \right) + \\
& \left\{ \frac{4n}{10(p_{34}-4)} \right\} \prod_{j=35}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4} \right) + \left\{ \frac{8n}{10(p_{35}-4)} \right\} \prod_{j=36}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4} \right) + \\
& \left\{ \frac{8n}{10(p_{36}-4)} \right\} \prod_{j=37}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4} \right) + \left\{ \frac{4n}{10(p_{37}-4)} \right\} \prod_{j=38}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4} \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{8n}{10(p_{38}-4)} \right\} \prod_{j=39}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4} \right) + \left\{ \frac{6n}{10(p_{39}-4)} \right\} \prod_{j=40}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4} \right) + \\
& \left\{ \frac{6n}{10(p_{40}-4)} \right\} \prod_{j=41}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4} \right) + \left\{ \frac{8n}{10(p_{41}-4)} \right\} \prod_{j=42}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4} \right) + \\
& \left\{ \frac{4n}{10(p_{42}-4)} \right\} \prod_{j=43}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4} \right) + \left\{ \frac{8n}{10(p_{43}-4)} \right\} \prod_{j=44}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4} \right) + \\
& \left\{ \frac{8n}{10(p_{44}-4)} \right\} \prod_{j=45}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4} \right) + \left\{ \frac{2n}{10(p_{45}-4)} \right\} \prod_{j=46}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4} \right) + \\
& \left\{ \frac{2n}{10(p_{46}-4)} \right\} \prod_{j=47}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4} \right) + \left\{ \frac{10n}{10(p_{47}-4)} \right\} \prod_{j=48}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4} \right) + \\
& \left\{ \frac{20n}{10(p_{48}-4)} \right\} \prod_{j=49}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4} \right) + \\
& \left\{ \frac{12n}{10(p_{49}-4)} \right\} \left\{ \frac{p_{48}}{p_{50}-4} \right\} + \left\{ \frac{2n}{10(p_{50}-4)} \right\} \quad (84)
\end{aligned}$$

将 $p_5=11$, $p_6=13$, $p_7=17$, $p_8=19$, $p_9=23$, $p_{10}=29$,
 $p_{11}=31$, $p_{12}=37$, $p_{13}=41$, $p_{14}=43$, $p_{15}=47$, $p_{16}=53$,
 $p_{17}=59$, $p_{18}=61$, $p_{19}=67$, $p_{20}=71$, $p_{21}=73$, $p_{22}=79$,
 $p_{23}=83$, $p_{24}=89$, $p_{25}=97$, $p_{26}=101$, $p_{27}=103$,
 $p_{28}=107$, $p_{29}=109$, $p_{30}=113$, $p_{31}=127$, $p_{32}=131$,
 $p_{33}=137$, $p_{34}=139$, $p_{35}=149$, $p_{36}=151$, $p_{37}=157$,
 $p_{38}=163$, $p_{39}=167$, $p_{40}=173$, $p_{41}=179$, $p_{42}=181$,
 $p_{43}=191$, $p_{44}=193$, $p_{45}=197$, $p_{46}=199$, $p_{47}=211$,
 $p_{48}=223$, $p_{49}=227$, $p_{50}=229$ 代入 (84) 式得

$$F_2 = 0.097n \quad (85)$$

(85) 代入 (83) 再代入 (37) 式可得

$$|N_B| > \left(\frac{n}{10}\right) \prod_{j=6}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) \prod_{i=4}^r \left(\frac{p_i-4}{p_i}\right) + F_3 \quad (86)$$

$$F_3 = \{0.097n - \frac{0.208(p_1 + p_r)p_r}{\ln p_r}\} \prod_{i=4}^r \left(\frac{p_i-4}{p_i}\right) \quad (87)$$

将 (1), (2) 式代入 (87) 式得

$$F_3 \geq F_4 p_r \prod_{i=4}^r \left\{ \frac{p_i-4}{p_i} \right\} \quad (88)$$

$$F_4 = 0.0485 p_r - \frac{0.208(p_1 + p_r)}{\ln p_r} \quad (89)$$

$$\begin{aligned} \frac{dF_4}{dp_r} &= 0.0485 - 0.208 \left\{ \frac{\ln p_r - (p_1 + p_r)(1/p_r)}{\ln^2 p_r} \right\} = \\ &0.0485 - \frac{0.208}{\ln p_r} + \frac{0.208(p_1 + p_r)}{p_r \ln^2 p_r} > 0.0485 - \frac{0.208}{\ln p_r} \end{aligned} \quad (90)$$

令 $0.0485 - \frac{0.208}{\ln p_r} > 0$ 可得

$$p_r > e^{4.2887} = 73 \quad (91)$$

将条件 (91) 代入 (90) 式可得

$$\frac{dF_4}{dp_r} > 0 \quad (p_r > 73) \quad (92)$$

由 (92) 式可知, 当 $p_r > 73$ 时, F_4 为 p_r 的递增函数。

而当, $A \geq 60\,000$ 时, $p_r \geq 241 > 73$

且 $F_4(p_r=241)=2.4732 > 2$

故知 $F_4 > 2$ ($A \geq 60\,000$) (93)

将 (93) 式代入 (88) 式得

$$F_3 \geq 2 p_r \prod_{i=4}^r \left(\frac{p_i-4}{p_i}\right) \quad (94)$$

$$\text{已知, } p_i - 4 \geq p_{i-2}, \quad i \geq 4 \quad (95)$$

由 (94), (95) 式可知

$$F_3 \geq 2p_r \prod_{i=4}^r \left(\frac{p_{i-2}}{p_i} \right) = \frac{2p_r p_2 p_3}{p_{r-1} p_r} = \frac{30}{p_{r-1}} > 0 \quad (96)$$

将 (95), (96) 代入 (86) 式得

$$|N_B| > \left(\frac{n}{10} \right) \left(\frac{3}{p_4} \right) \left(\frac{7}{p_5} \right) \prod_{i=6}^r \left\{ \frac{p_{i-2}}{p_i} \right\} \quad (97)$$

将 (1), (2) 式代入 (97) 式可得

$$|N_B| > \left(\frac{21p_r^2}{20p_4 p_5} \right) \left(\frac{p_4 p_5}{p_{r-1} p_r} \right) \quad (98)$$

已知 $p_r \geq p_{r-1} + 2$, 故得

$$|N_B| > \frac{21}{20} + \frac{2.1}{p_{r-1}} > 1.05 \quad (99)$$

4.1.2 通过子集 N_B 求解

我们从子集 N_B 中任取一个元素 x_1 , 再引入参量:

$$x_2 = x_1 - 2 \quad (101)$$

$$y_1 = A - x_1 \quad (102)$$

$$y_2 = A - x_1 + 2 \quad (103)$$

以集合 P 中各元素为模数, 求得同余式组:

$$x_1 \equiv x_{1i} \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$x_2 \equiv x_{2i} \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$y_1 \equiv y_{1i} \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$y_2 \equiv y_{2i} \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

根据定义可知

$$x_1 \in E, \quad x_1 > 1 \quad (104)$$

$$x_2 \in E, \quad x_2 > 1 \quad (105)$$

$$y_1 \in E, \quad y_1 > 1 \quad (106)$$

$$y_2 \in E, \quad y_2 > 1 \quad (107)$$

由于 $x_1 \in N_B$, 根据 (4), (5), (6), (7) 式四个筛选条件可知

$$x_{1i} \neq 0, \quad i=1,2,\dots,r \quad (108)$$

$$x_{1i} \neq 2, \quad i=1,2,\dots,r \quad (109)$$

$$x_{1i} \neq A_i, \quad i=1,2,\dots,r \quad (110)$$

$$x_{1i} \neq A_i + 2, \quad i=1,2,\dots,r \quad (111)$$

依据同余式的性质, 由 (101), (102) 和 (103) 式可以推得

$$x_{2i} \equiv x_{1i} - 2 \pmod{p_i}, \quad i=1,2,\dots,r \quad (112)$$

$$y_{1i} \equiv A_i - x_{1i} \pmod{p_i}, \quad i=1,2,\dots,r \quad (113)$$

$$y_{2i} \equiv A_i - x_{1i} + 2 \pmod{p_i}, \quad i=1,2,\dots,r \quad (114)$$

由 (109) 式和 (112) 式可知

$$x_{2i} \neq 0, \quad i=1,2,\dots,r \quad (115)$$

由 (110) 式和 (113) 式可知

$$y_{1i} \neq 0, \quad i=1,2,\dots,r \quad (116)$$

由 (111) 式和 (114) 式可知

$$y_{2i} \neq 0, \quad i=1,2,\dots,r \quad (117)$$

根据第一章引理 3, 由 (104) 和 (108) 式可知 x_1 为奇素数。

根据第一章引理 3, 由 (105) 和 (115) 式可知 x_2 为奇素数。

根据第一章引理 3, 由 (106) 和 (116) 式可知 y_1 为奇素数。

根据第一章引理 3, 由 (107) 和 (117) 式可知 y_2 为奇素数

由 (101) 式可得: $x_1 - x_2 = 2$ (118)

可见, (x_1, x_2) 为一对孪生素数, 它的中值用 x_3 表示。

$$x_3 = (x_1 + x_2)/2 = x_1 - 1 \quad (119)$$

将 (103), (102) 两端相减, 可得

$$y_2 - y_1 = 2 \quad (120)$$

可见, (y_1, y_2) 为一对孪生素数, 它的中值用 y_3 表示。

$$y_3 = (y_1 + y_2)/2 = A - x_1 + 1 \quad (121)$$

将 (119) 和 (121) 式两端相加, 得

$$A = x_3 + y_3 \quad (122)$$

(122) 式即为所求关系式。考虑到 (93) 式的限制条件, (122) 式表示不小于 60 000 的含素因子 3 和 5 的任意大偶数都可表为两个孪生素数中值之和。

小于 60 000 的含素因子 3 和 5 的偶数皆可用数值验证方法得到证明。

4.2 解的完备性问题

上述求解方法, 通过集合 N_B 求得的解并非偶数 A 的全解。因为它不涉及小于 $A^{1/2}$ 部分的解, 关于这一部分解, 可以通过下面给出的补充求解方法求得。

延用 4.1 节的定义符号:

$$E = (1, 2, \dots, A)$$

$$P = (p_1, p_2, \dots, p_r)$$

$$2 = p_1 < p_2 < \dots < p_r \leq A^{1/2} \quad (123)$$

$$A \equiv A_i \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

再引一个新的素数集合 P_H 。

$$P_H = P \cup p_{r+1} = (p_1, p_2, \dots, p_r, p_{r+1}) \quad (124)$$

$$p_{r+1} = p_r + 2 \quad (125)$$

从集合 P_H 中, 用筛选方法分选出必要的子集。

给定筛选条件如下:

$$p_{r+1} \not\equiv 0 \pmod{p_i}, \quad i=1,2,\dots,r \quad (126)$$

$$g-2 \in P, \quad (127)$$

$$g \not\equiv A_i \pmod{p_i}, \quad i=1,2,\dots,r,r+1 \quad (128)$$

$$g \not\equiv A_i + 2 \pmod{p_i}, \quad i=1,2,\dots,r,r+1 \quad (129)$$

g 表示集合 P_H 中的被选元素。

从集合 P 中将同时符合 (127), (128), (129) 式的所有元素与同时符合 (126), (127), (128), (129) 式的 p_{r+1} 一起组成 P_{HB} 。

根据筛选条件 (126) 式可知, 集合 P_{HB} 中的元素 p_{r+1} 为奇素数, 根据筛选条件 (127) 式可知 p_1 和 p_2 都不属于 P_{HB} 。所以, 集合 P_{HB} 中的元素 (当 P_{HB} 不为空集时) 只能是奇素数。

$$\text{假若 } P_{HB} \neq \emptyset \quad (130)$$

我们从集合 P_{HB} 中任取一个元素 ξ_1 , 再引入参量:

$$\xi_2 = \xi_1 - 2 \quad (131)$$

$$\beta_1 = A - \xi_1 \quad (132)$$

$$\beta_2 = A - \xi_1 + 2 \quad (133)$$

并由该三个定义式可知

$$\xi_2 \in E, \quad \xi_2 > 1 \quad (134)$$

$$\beta_1 \in E, \quad \beta_1 > 1 \quad (135)$$

$$\beta_2 \in E, \quad \beta_2 > 1 \quad (136)$$

以集合 P 中各元素为模数, 求得同余式组:

$$\xi_1 \equiv \xi_{1i} \pmod{p_i}, \quad i=1,2,\dots,r \quad (137)$$

$$\beta_1 \equiv \beta_{1i} \pmod{p_i}, \quad i=1,2,\dots,r \quad (138)$$

$$\beta_2 \equiv \beta_{2i} \pmod{p_i}, \quad i=1,2,\dots,r \quad (139)$$

由于 $\xi_1 \in P_{HB}$, 根据筛选条件 (127), (128) 和 (129) 式可知

$$\xi_1 - 2 \in P \quad (140)$$

$$\xi_{1i} \neq A_i, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (141)$$

$$\xi_{1i} \neq A_i + 2, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (142)$$

依据同余式的性质, 由 (132), (133) 式可推得

$$\beta_{1i} \equiv A_i - \xi_{1i} \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (143)$$

$$\beta_{2i} \equiv A_i - \xi_{1i} + 2 \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (144)$$

由 (141) 和 (143) 式可知:

$$\beta_{1i} \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (145)$$

由 (142) 式和 (144) 式可知

$$\beta_{2i} \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (146)$$

由 (131) 式和 (140) 式可知, ξ_2 为奇素数。

根据第一章引理 3, 由 (135) 和 (145) 式可知, β_1 为奇素数。

根据第一章引理 3, 由 (136) 和 (146) 式可知, β_2 为奇素数。

将 (131) 式移项可得

$$\xi_1 - \xi_2 = 2 \quad (147)$$

故知, (ξ_1, ξ_2) 为一对孪生素数, 它的中值用 ξ_3 表示, 则

$$\xi_3 = (\xi_1 + \xi_2) / 2 = \xi_1 - 1 \quad (148)$$

将 (133) 和 (132) 两端相减, 可得

$$\beta_2 - \beta_1 = 2 \quad (149)$$

故知, (β_1, β_2) 为一对孪生素数, 它的中值用 β_3 表示, 则

$$\beta_3 = (\beta_1 + \beta_2) / 2 = A - \xi_1 + 1 \quad (150)$$

将 (148) 式和 (150) 式两端相加得

$$A = \xi_3 + \beta_3 \quad (151)$$

(151) 式即表明 (ξ_1, ξ_2) 和 (β_1, β_2) 为满足 (122) 式的两对孪生素数。

ξ_1 为集合 P_{HB} 中任一元素, 故 P_{HB} 中每个元素都对应满足 (122) 式的两对孪生素数。

4.3 求解程序

下面是用 ASP 写的求解程序, 包括输入界面和运算显示两个文件:

第一个文件 (input.asp):

```
<html>
<head>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=
gb2312">
<LINK href="/style.css" type=text/css rel=stylesheet>
<title>含素因子 3、5 的偶数</title>
<script language="JavaScript" >
function suborno(){
    var a=form1.a.value;
    if(a=="||a==null){
        alert("请输入偶数 (30 的倍数)! ");
        return;
    }else if(parseInt(a)%30!=0||parseInt(a)<30){
        alert("输入的偶数必须是 30 的倍数! ");
        return;
    }form1.submit();
}
</script>

</head>
```



```
<body bgcolor="#BFC0B6">  
<p align="center"><font color="#FF0000" size="4"><strong>  
因子 3、5 的偶数求解程序</strong></font></p>  
<p align="center">&nbsp;</p>  
<p align="center">&nbsp;</p>  
<p align="center">如果您输入的偶数较大，计算时间将会较  
请耐心等待！</p>  
<form name="form1" method="post" action=" sievejs.asp">  
  <table width="500" border="0" align="center" cellpadding=  
cellspacing="0">  
    <tr>  
      <td width="232" align="right">请输入偶数（30 的倍  ||  | <td width="248"><input name="a" type="text" id="a"> |
|  | </td> |
|  | </tr> |
|  | <tr> |
|  | <td align="center" colspan="2"><input type="button" name= |
|  | mit1" value="提交" onClick="javascript:suborno());> |
|  | &nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&~<br><input type="reset" name="Submit2" value="重置"></td> |
|  | </tr> |
|  | </table> |
|  | </form> |
|  | <p align="center">&nbsp;</p> |
|  | </body> |
|  | </html> |

```

```

<html>
<head>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=
gb2312">
<LINK href="/style.css" type=text/css rel=stylesheet>
<title>含素因子 3、5 的偶数</title>
</head>
<body bgcolor="#BFC0B6"><br>&nbsp;<br>&nbsp;<br>&nbsp;<br>
<div align="center" id="wait_div"><font color="#FF0000"
size="4"><strong>如果出现提示“.....是否取消该脚本？”，请点
击“否”，并请耐心等待！</strong></font></div>
<div align="center" id="wait2_div" style="display:none">
<font color="#FF0000" size="5"><strong>含素因子 3、5 的偶数求
解运算结果</strong></font></div>
<p><script language="JavaScript">
var a,i,pi,j,flag,ni,n,m,x,y,k,pr,ther,num1,num2,num3;
//var array_ni = new Array();
var array_pi = new Array();
//var array_pi2 = new Array();
var array_n = new Array();
var array_ai = new Array();
var array_hi = new Array();
//var array_pi_ni = new Array()
//a=clng(request.form("a"))
num1=0;
num2=0;
num3=0;
a=parseInt("<%=a%>");
if (a<30 || a % 30 !=0)
{

```

[illegible]

```
//array_ni[i]=ni;
array_pi[i]=pi;
//array_pi2[i]=pi;
array_ai[i]=a%pi;
//array_pi_ni[i]=pi-ni
//alert(array_pi[i]);
i++;
    }
}

ther=i;

for(i=0;i<n-1;i++){
    array_n[i]=i+2;
    //alert(array_n[i]);
}

for(i=0;i<array_n.length;i++)
{
    for(k=0;k<array_pi.length;k++)
    {
        if(array_pi[k]>array_ai[k]+2){

            if((array_n[i]%array_pi[k]==0)||(array_n[i]%array_pi[k]==2)||
            (array_n[i]%array_pi[k]==array_ai[k])||(array_n[i]%array_pi[k]==array_ai[k]+2))
            {
                array_n[i]=0;
                break;
            }
        }
    }
}
```

```

    }else{

        if((array_n[i]%array_pi[k]==0)||((array_n[i]%array
        _pi[k]==2)||((array_n[i]%array_pi[k]==array_ai[k])||((array_n[i]%arra
        y_pi[k]==array_ai[k]+2-array_pi[k])))
            {
                array_n[i]=0;
                break;
            }
        }

    }

    x=0;
    for(i=0;i<n-1;i++){
        if(array_n[i]>0){
            x++;
            //alert(array_n[i]);
        }
    }
    var xx=0
    for(i=1;i<array_pi.length;i++){
        if(array_pi[i]-array_pi[i-1]==2){
            array_hi[xx]=array_pi[i];
            //alert(array_hi[xx]);
            xx++;
        }
    }

    var thepr2=array_pi[array_pi.length-1]+2;

```

```
var thepr2flag=1;
for(i=0;i<array_pi.length;i++){
    if(thepr2%array_pi[i]==0){
        thepr2flag=0;
        break;
    }
}if(thepr2flag==1){
    array_hi[xx]=thepr2;
    xx++;
}
//alert(array_pi.length);

if(array_hi.length>0){
    for(var xx1=0;xx1<array_hi.length;xx1++){
        for(i=0;i<array_pi.length;i++){
            //alert(array_hi[xx1]+" "+array_ai[i]);
            if(array_pi[i]>array_ai[i]+2){

                if((array_hi[xx1]%array_pi[i]==array_ai[i])||(array
_hi[xx1]%array_pi[i]==array_ai[i]+2)){
                    //alert(array_hi[xx1]+"
"+array_ai[i]);

                    array_hi[xx1]=0;

                    break;
                }
            }else{

                if((array_hi[xx1]%array_pi[i]==array_ai[i])||(array
_hi[xx1]%array_pi[i]==array_ai[i]+2-array_pi[i])){
                    //alert(array_hi[xx1]+"

```



```

        document.write("<br>");

        }

        m=m+1;

    }

}

document.write("<br><font color=#0000FF size=3>从集合 N
中求得解的组数为: </font>" + x + "<br>");
if(x>0){
    document.write("<font color=#0000FF size=3>从
集合 N 中求得的解: </font><br>");
    var astr=new String(a);
    var thelength=astr.length;
    var x11,x22,y11,y22;
    m=1;
    for(i=0;i<n-1;i++){
        switch(array_n[i])
        {
            case 0: break;
            default:
                x1=array_n[i];
                y1=array_n[i]-2;
                x2=a-array_n[i];
                y2=a+2-array_n[i];
                x11=new String(x1);
                for(var
iii=x11.length;iii<thelength;iii++){
                    x11="0"+" "+x11;

```

[illegible]

```
document.all("wait_div").style.display="none";  
document.all("wait2_div").style.display="";  
}  
</script>  
</p></body>  
</html>
```

4.4 实筛数据

输入的偶数 a 为: 300 $n = a/2 = 150$

从集合 P 中求得的解的组数为: 1

从集合 P 中求得的解:

$x_1=019$ $y_1=017$ $x_2=281$ $y_2=283$

从集合 N 中求得的解的组数为: 6

从集合 N 中求得的解:

$x_1=031$ $y_1=029$ $x_2=269$ $y_2=271$

$x_1=061$ $y_1=059$ $x_2=239$ $y_2=241$

$x_1=073$ $y_1=071$ $x_2=227$ $y_2=229$

$x_1=103$ $y_1=101$ $x_2=197$ $y_2=199$

$x_1=109$ $y_1=107$ $x_2=191$ $y_2=193$

$x_1=151$ $y_1=149$ $x_2=149$ $y_2=151$

输入的偶数 a 为: 6000 $n = a/2 = 3000$

从集合 N 中求得的解的组数为: 12

从集合 N 中求得的解:

$x_1=0151$ $y_1=0149$ $x_2=5849$ $y_2=5851$

$x_1=0349$ $y_1=0347$ $x_2=5651$ $y_2=5653$

$x_1=0523$ $y_1=0521$ $x_2=5477$ $y_2=5479$

$x_1=1033$ $y_1=1031$ $x_2=4967$ $y_2=4969$

$x_1=1279$ $y_1=1277$ $x_2=4721$ $y_2=4723$

$x_1=1453$ $y_1=1451$ $x_2=4547$ $y_2=4549$

$x_1=1483$ $y_1=1481$ $x_2=4517$ $y_2=4519$
 $x_1=1873$ $y_1=1871$ $x_2=4127$ $y_2=4129$
 $x_1=1951$ $y_1=1949$ $x_2=4049$ $y_2=4051$
 $x_1=1999$ $y_1=1997$ $x_2=4001$ $y_2=4003$
 $x_1=2083$ $y_1=2081$ $x_2=3917$ $y_2=3919$
 $x_1=3001$ $y_1=2999$ $x_2=2999$ $y_2=3001$

输入的偶数 a 为: 90000 $n = a/2=45000$

从集合 P 中求得的解的组数为: 2

从集合 P 中求得的解:

$x_1=00103$ $y_1=00101$ $x_2=89897$ $y_2=89899$
 $x_1=00181$ $y_1=00179$ $x_2=89819$ $y_2=89821$

从集合 N 中求得的解的组数为: 48

从集合 N 中求得的解:

$x_1=01999$ $y_1=01997$ $x_2=88001$ $y_2=88003$
 $x_1=03373$ $y_1=03371$ $x_2=86627$ $y_2=86629$
 $x_1=03469$ $y_1=03467$ $x_2=86531$ $y_2=86533$
 $x_1=04549$ $y_1=04547$ $x_2=85451$ $y_2=85453$
 $x_1=04639$ $y_1=04637$ $x_2=85361$ $y_2=85363$
 $x_1=04801$ $y_1=04799$ $x_2=85199$ $y_2=85201$
 $x_1=05023$ $y_1=05021$ $x_2=84977$ $y_2=84979$
 $x_1=05479$ $y_1=05477$ $x_2=84521$ $y_2=84523$
 $x_1=05653$ $y_1=05651$ $x_2=84347$ $y_2=84349$
 $x_1=06361$ $y_1=06359$ $x_2=83639$ $y_2=83641$
 $x_1=06661$ $y_1=06659$ $x_2=83339$ $y_2=83341$
 $x_1=06781$ $y_1=06779$ $x_2=83219$ $y_2=83221$
 $x_1=08629$ $y_1=08627$ $x_2=81371$ $y_2=81373$
 $x_1=09769$ $y_1=09767$ $x_2=80231$ $y_2=80233$
 $x_1=10303$ $y_1=10301$ $x_2=79697$ $y_2=79699$
 $x_1=11491$ $y_1=11489$ $x_2=78509$ $y_2=78511$
 $x_1=13999$ $y_1=13997$ $x_2=76001$ $y_2=76003$

$x_1=14011$	$y_1=14009$	$x_2=75989$	$y_2=75991$
$x_1=15271$	$y_1=15269$	$x_2=74729$	$y_2=74731$
$x_1=17749$	$y_1=17747$	$x_2=72251$	$y_2=72253$
$x_1=17911$	$y_1=17909$	$x_2=72089$	$y_2=72091$
$x_1=18121$	$y_1=18119$	$x_2=71879$	$y_2=71881$
$x_1=18289$	$y_1=18287$	$x_2=71711$	$y_2=71713$
$x_1=19081$	$y_1=19079$	$x_2=70919$	$y_2=70921$
$x_1=19381$	$y_1=19379$	$x_2=70619$	$y_2=70621$
$x_1=19429$	$y_1=19427$	$x_2=70571$	$y_2=70573$
$x_1=19543$	$y_1=19541$	$x_2=70457$	$y_2=70459$
$x_1=20509$	$y_1=20507$	$x_2=69491$	$y_2=69493$
$x_1=20809$	$y_1=20807$	$x_2=69191$	$y_2=69193$
$x_1=22573$	$y_1=22571$	$x_2=67427$	$y_2=67429$
$x_1=22861$	$y_1=22859$	$x_2=67139$	$y_2=67141$
$x_1=24421$	$y_1=24419$	$x_2=65579$	$y_2=65581$
$x_1=25849$	$y_1=25847$	$x_2=64151$	$y_2=64153$
$x_1=28621$	$y_1=28619$	$x_2=61379$	$y_2=61381$
$x_1=30559$	$y_1=30557$	$x_2=59441$	$y_2=59443$
$x_1=31771$	$y_1=31769$	$x_2=58229$	$y_2=58231$
$x_1=31849$	$y_1=31847$	$x_2=58151$	$y_2=58153$
$x_1=32443$	$y_1=32441$	$x_2=57557$	$y_2=57559$
$x_1=33289$	$y_1=33287$	$x_2=56711$	$y_2=56713$
$x_1=34369$	$y_1=34367$	$x_2=55631$	$y_2=55633$
$x_1=35083$	$y_1=35081$	$x_2=54917$	$y_2=54919$
$x_1=38653$	$y_1=38651$	$x_2=51347$	$y_2=51349$
$x_1=41143$	$y_1=41141$	$x_2=48857$	$y_2=48859$
$x_1=41179$	$y_1=41177$	$x_2=48821$	$y_2=48823$
$x_1=41521$	$y_1=41519$	$x_2=48479$	$y_2=48481$
$x_1=42223$	$y_1=42221$	$x_2=47777$	$y_2=47779$
$x_1=43321$	$y_1=43319$	$x_2=46679$	$y_2=46681$
$x_1=43651$	$y_1=43649$	$x_2=46349$	$y_2=46351$

第五章 素数的分项表示问题

本章将要证明的问题是, 大于 5 的素数都可表示为一个奇素数与一个孪生素数中值之和。

孪生素数中值是指孪生素数中两素数之间的偶数, 即是该两素数的算术平均值。

5.1 求解证明

设 A 为大于 10 211 的任意大素数, 将不超过 A 的全部正整数集合用 E 表示。

以埃氏筛法求得不超过 $A^{1/2}$ 的全部素数集合 P , 并将集合 P 中元素按数值大小顺序排列如下: $P = (p_1, p_2, \dots, p_r)$

$$2 = p_1 < p_2 < \dots < p_r \leq A^{1/2} \quad (1)$$

以集合 P 中元素为模数, 求得同余式组:

$$A \equiv A_i \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

A_i 为非负的最小剩余。

将不超过 A 且大于 p_r 的全部正整数集合用 N 表示, 则集合 N 的基数 $|N|$ 为:

$$|N| = A - p_r \geq p_r^2 - p_r \quad (2)$$

用筛选方法从集合 N 中分选出必要的子集。

给定筛选条件:

$$g \not\equiv 0 \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (3)$$

$$g \not\equiv A_i + 1 \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (4)$$

$$g \not\equiv A_i - 1 \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (5)$$

g 表示集合 N 中被选元素。

从集合 N 中将同时符合 (3), (4), (5) 式筛选条件的所有元素分选出来, 组成子集 N_B , 再来讨论子集 N_B 的基数 $|N_B|$ (筛函数)。

5.1.1 求证筛函数的下界

已知, 集合 N 为自然数列集合, 模数集合 P 中元素为互不相同的素数, 根据第一章的相关公式 (61) 式可知, 基数 $|N_B|$ 的近似估算公式为

$$|N_B| = |N| \prod_{i=1}^r \left(\frac{\alpha_i}{p_i} \right) \quad (6)$$

根据第一章的 (72) 式可知, 基数 $|N_B|$ 的下界计算公式为

$$|N_B| > |N| \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{p_i}{|N|} \right) \left(\frac{\alpha_i}{p_i} \right) \quad (7)$$

式中 α_i 为按照筛选条件所选取的模 p_i 的同余类子集的个数。下面具体分析确定 α_i 的数值。

当 $i=1$ 时, 筛选条件 (3), (4), (5) 式具体为

$$g \not\equiv 0 \pmod{p_1} \quad (8)$$

$$g \not\equiv A_1 + 1 \pmod{p_1} \quad (9)$$

$$g \not\equiv A_1 - 1 \pmod{p_1} \quad (10)$$

$$p_1 = 2$$

A 为奇素数, 必然 $A_1 = 1$, 由此推得: $A_1 + 1 = 2$, $A_1 - 1 = 0$ 。可见, (9) 式和 (10) 式完全等同于 (8) 式。

根据 (8) 式可知, 集合 N 中按模 p_1 只有模 p_1 的“1 同余类子集”符合筛选条件, 故得

$$\alpha_1 = 1 \quad (11)$$

当 $i=2$ 时, 筛选条件 (3), (4), (5) 式具体为

$$g \not\equiv 0 \pmod{p_2} \quad (12)$$

$$g \not\equiv A_2 + 1 \pmod{p_2} \quad (13)$$

$$g \not\equiv A_2 - 1 \pmod{p_2} \quad (14)$$

$$p_2 = 3$$

A 为素数, 必然不能被 3 整除, 余数 A_2 只能是 $A_2 = 1$ 或 $A_2 = 2$ 。
 $A_2 = 1$ 时, (14) 式与 (12) 式等价, $A_2 = 2$ 时, (13) 式与 (12) 式等价。总之 (12), (13) 和 (14) 式中只有两个有效条件对应于两个不同的同余类子集。由此推知, 集合 N 中按模 p_2 只有模 p_2 的一个同余类子集 (“1 同余类子集” 或 “2 同余类子集”) 符合筛选条件, 故得

$$\alpha_2 = 1 \quad (15)$$

当 $i > 2$ 时, 筛选条件 (3), (4), (5) 式根据 A_i 值的不同可分如下两种情况:

其一, $A_i = 1$ 或者 $A_i = p_i - 1$ 。

此时, (3), (4), (5) 式可以合并为两个条件。集合 N 中按模 p_i 应有 $p_i - 2$ 个模 p_i 的同余类子集符合筛选条件, 故得:

$$\alpha_i = p_i - 2, \quad i > 2 \quad (16)$$

其二, $A_i \neq 1$ 且 $A_i \neq p_i - 1$ 。

此时, (3), (4), (5) 式对应于三个不同的同余类子集。集合 N 中按模 p_i 应有 $p_i - 3$ 个模 p_i 的同余类子集符合筛选条件, 故得:

$$\alpha_i = p_i - 3, \quad i > 2 \quad (17)$$

将 (16), (17) 式合并, 得

$$\alpha_i = p_i - 1 - 2^\delta, \quad i > 2 \quad (18)$$

$$\delta_i = 0 \quad (A_i = 1 \text{ 或 } A_i = p_i - 1)$$

$$\delta_i = 1 \quad (A_i \neq 1 \text{ 且 } A_i \neq p_i - 1)$$

将 (11), (15) 和 (18) 式代入 (6) 式得

$$|N_B| = \frac{|N|}{6} \prod_{i=3}^r \left(\frac{p_i - 1 - 2^{\delta_i}}{p_i} \right) \quad (19)$$

$$\delta_i = 0 \quad (A_i = 1 \text{ 或 } A_i = p_i - 1)$$

$$\delta_i = 1 \quad (A_i \neq 1 \text{ 且 } A_i \neq p_i - 1)$$

将 (11), (15) 和 (18) 式代入 (7) 式得

$$|N_B| > F_1 \left(\frac{|N|}{6} \right) \prod_{i=3}^r \left(\frac{p_i - 1 - 2^{\delta_i}}{p_i} \right) \quad (20)$$

$$\delta_i = 0 \quad (A_i = 1 \text{ 或 } A_i = p_i - 1)$$

$$\delta_i = 1 \quad (A_i \neq 1 \text{ 且 } A_i \neq p_i - 1)$$

$$F_1 = \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{p_i}{|N|} \right) > 1 - \frac{1}{|N|} \sum_{i=1}^r p_i \quad (21)$$

由于 $F_1 > 0$, 根据第一章 (64) 式可将 (20) 式改为

$$|N_B| > F_1 \left(\frac{|N|}{6} \right) \prod_{i=3}^r \left(\frac{p_i - 3}{p_i} \right) \quad (22)$$

由第一章 (77) 式推得

$$\Pi(x) - \Pi\left(\frac{x}{2}\right) < \Pi\left(\frac{x}{2}\right) \quad (23)$$

(23) 式表示数值越大的区域素数分布的密度越小, 由此可知

$$\sum_{i=1}^r p_i < \left(\frac{1}{2}\right)(p_1 + p_r) \Pi(p_r) \quad (24)$$

根据切比晓夫不等式可知

$$\Pi(p_r) < 6 \ln 2 \left(\frac{p_r}{\ln p_r} \right) \quad (25)$$

(25) 式代入 (24) 式得

$$\sum_{i=1}^r p_i < \frac{2.08(p_1 + p_r)p_r}{\ln p_r} \quad (26)$$

将 (26) 式代入 (21) 式, 可得

$$F_1 > 1 - \frac{2.08(p_1 + p_r)p_r}{|N| \ln p_r} \quad (27)$$

将 (27) 式代入 (22) 式, 可得

$$|N_B| > \left\{ \frac{|N|}{6} - \frac{2.08(p_1 + p_r)p_r}{6 \ln p_r} \right\} \prod_{i=3}^r \left(\frac{p_i - 3}{p_i} \right) \quad (28)$$

将 $|N|$ 作以下变换

$$|N| = |N| \{p_{10} / (p_{12} - 3)\} + 5|N| / (p_{12} - 3) \quad (29)$$

$$|N| = |N| \{p_{11} / (p_{13} - 3)\} + 7|N| / (p_{13} - 3) \quad (30)$$

$$|N| = |N| \{p_{12} / (p_{14} - 3)\} + 3|N| / (p_{14} - 3) \quad (31)$$

$$|N| = |N| \{p_{13} / (p_{15} - 3)\} + 3|N| / (p_{15} - 3) \quad (32)$$

$$|N| = |N| \{p_{14} / (p_{16} - 3)\} + 7|N| / (p_{16} - 3) \quad (33)$$

$$|N| = |N| \{p_{15} / (p_{17} - 3)\} + 9|N| / (p_{17} - 3) \quad (34)$$

$$|N| = |N| \{p_{16} / (p_{18} - 3)\} + 5|N| / (p_{18} - 3) \quad (35)$$

$$|N| = |N| \{p_{17} / (p_{19} - 3)\} + 5|N| / (p_{19} - 3) \quad (36)$$

$$|N| = |N| \{p_{18} / (p_{20} - 3)\} + 7|N| / (p_{20} - 3) \quad (37)$$

$$|N| = |N| \{p_{19} / (p_{21} - 3)\} + 3|N| / (p_{21} - 3) \quad (38)$$

$$|N| = |N| \{p_{20} / (p_{22} - 3)\} + 5|N| / (p_{22} - 3) \quad (39)$$

$$|N| = |N|\{p_{21}/(p_{23}-3)\} + 7|N|/(p_{23}-3) \quad (40)$$

$$|N| = |N|\{p_{22}/(p_{24}-3)\} + 7|N|/(p_{24}-3) \quad (41)$$

$$|N| = |N|\{p_{23}/(p_{25}-3)\} + 11|N|/(p_{25}-3) \quad (42)$$

$$|N| = |N|\{p_{24}/(p_{26}-3)\} + 9|N|/(p_{26}-3) \quad (43)$$

将 (29) ~ (43) 式逐次代入右端第一项得

$$|N| = |N| \prod_{i=12}^{26} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i - 3} \right) + F_2 \quad (44)$$

$$\begin{aligned} F_2 = & \left(\frac{5|N|}{p_{12}-3} \right) \prod_{i=13}^{26} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i - 3} \right) + \left(\frac{7|N|}{p_{13}-3} \right) \prod_{i=14}^{26} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i - 3} \right) + \\ & \left(\frac{3|N|}{p_{14}-3} \right) \prod_{i=15}^{26} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i - 3} \right) + \left(\frac{3|N|}{p_{15}-3} \right) \prod_{i=16}^{26} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i - 3} \right) + \\ & \left(\frac{7|N|}{p_{16}-3} \right) \prod_{i=17}^{26} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i - 3} \right) + \left(\frac{9|N|}{p_{17}-3} \right) \prod_{i=18}^{26} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i - 3} \right) + \\ & \left(\frac{5|N|}{p_{18}-3} \right) \prod_{i=19}^{26} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i - 3} \right) + \left(\frac{5|N|}{p_{19}-3} \right) \prod_{i=20}^{26} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i - 3} \right) + \\ & \left(\frac{7|N|}{p_{20}-3} \right) \prod_{i=21}^{26} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i - 3} \right) + \left(\frac{3|N|}{p_{21}-3} \right) \prod_{i=22}^{26} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i - 3} \right) + \\ & \left(\frac{5|N|}{p_{22}-3} \right) \prod_{i=23}^{26} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i - 3} \right) + \left(\frac{7|N|}{p_{23}-3} \right) \prod_{i=24}^{26} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i - 3} \right) + \\ & \left(\frac{7|N|}{p_{24}-3} \right) \prod_{i=25}^{26} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i - 3} \right) + \left(\frac{11|N|}{p_{25}-3} \right) \left(\frac{p_{24}}{p_{26}-3} \right) + \frac{9|N|}{p_{26}-3} \quad (45) \end{aligned}$$

将 $P_{11} = 31$, $P_{12} = 37$, $P_{13} = 41$, $P_{14} = 43$, $P_{15} = 47$, $P_{16} = 53$,
 $P_{17} = 59$, $P_{18} = 61$, $P_{19} = 67$, $P_{20} = 71$, $P_{21} = 73$, $P_{22} = 79$,
 $P_{23} = 83$, $P_{24} = 89$, $P_{25} = 97$, $P_{26} = 101$ 代入 (45) 式可得

$$F_2 = 0.8|N| \quad (46)$$

将 (46) 式代入 (44) 式得

$$|N| = |N| \prod_{i=12}^{26} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i - 3} \right) + 0.8|N| \quad (47)$$

将 (47) 式代入 (28) 式得

$$|N_B| > \left\{ \frac{|N|}{6} \prod_{i=12}^{26} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i - 3} \right) + F_3 \right\} \prod_{i=3}^r \left(\frac{p_i - 3}{p_i} \right) \quad (48)$$

$$F_3 = 0.1333|N| - \frac{0.3466(p_1 + p_r)p_r}{\ln p_r} \quad (49)$$

将 (2) 式代入 (49) 式, 可得

$$F_3 \geq F_4 p_r \quad (50)$$

$$F_4 = 0.1333(p_r - 1) - \frac{0.3466(p_1 + p_r)}{\ln p_r} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \frac{dF_4}{dp_r} &= 0.1333 - 0.3466 \left\{ \frac{\ln p_r - (p_1 + p_r)(1/p_r)}{\ln^2 p_r} \right\} = \\ 0.1333 - \frac{0.3466}{\ln p_r} + \frac{0.3466(p_1 + p_r)}{p_r \ln^2 p_r} &> 0.1333 - \frac{0.3466}{\ln p_r} \end{aligned} \quad (52)$$

$$\text{令 } 0.1333 - \frac{0.3466}{\ln p_r} > 0$$

$$\text{得 } p_r > 13.46 \quad (53)$$

将条件 (53) 式代入 (52) 式, 可得

$$\frac{dF_4}{dp_r} > 0, \quad p_r > 13.46 \quad (54)$$

(54) 式表明, 当 $p_r > 13.46$ 时, F_4 为 p_r 的递增函数。

当 $A \geq 10211$ 时, $p_r \geq 101 > 13.46$

且 $F_4(p_r = 101) = 5.59$ 故得

$$F_4 \geq 5.59 \quad A \geq 10211 \quad (55)$$

将 (55) 式代入 (50) 式得

$$F_3 \geq 5.59 p_r \quad (56)$$

将 (56) 式代入 (48) 式, 可得

$$|N_B| > \left\{ \frac{|N|}{6} \prod_{i=12}^{26} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i - 3} \right) + 5.59 p_r \right\} \prod_{i=3}^r \left(\frac{p_i - 3}{p_i} \right) > \frac{|N|}{6} \prod_{i=12}^{26} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i - 3} \right) \prod_{j=3}^r \left(\frac{p_j - 3}{p_j} \right) \quad (57)$$

$$\text{已知 } p_j - 3 > p_{j-2}, \quad j > 26 \quad (58)$$

由 (57), (58) 式可得

$$|N_B| > \frac{|N|}{6} \prod_{i=3}^{11} \left(\frac{p_i - 3}{p_i} \right) \prod_{j=12}^r \left(\frac{p_{j-2}}{p_j} \right) = \left(\frac{|N|}{6} \right) \left(\frac{2867200}{37182145} \right) \left(\frac{728}{p_r p_{r-1}} \right) \quad (59)$$

将 (2) 式代入 (59) 式得

$$|N_B| > 9.356 \left(\frac{p_r^2 - p_r}{p_r p_{r-1}} \right) > 9.356 \quad (60)$$

5.1.2 通过子集 N_B 求解

从集合 N_B 中任取一个元素 x^* , 则

$$x^* \in E, \quad x^* > 1 \quad (61)$$

以集合 P 中各元素为模数求得同余式组:

$$x^* \equiv x_i^* \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

由于 $x^* \in N_B$, 根据筛选条件 (3) 式可知

$$x_i^* \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (62)$$

根据第一章引理 3, 由 (61) 和 (62) 式可知 x^* 为奇素数。

由此知, 集合 N_B 中所有元素皆为奇素数。

由被筛集合 N 推知, 集合 N_B 中大于 $A-3$ 的奇素数最多只有两个。也就是说, 集合 N_B 中小于 $A-3$ 的元素个数至少为 $|N_B|-2$ 个。

由 (60) 式得

$$|N_B|-2 > 7.356 \quad (63)$$

从集合 N_B 中任取一个小于 $A-3$ 的元素 x 再引入参量:

$$y_1 = A - x + 1 \quad (64)$$

$$y_2 = A - x - 1 \quad (65)$$

根据定义可知:

$$x \in E, \quad x > 1 \quad (66)$$

$$y_1 \in E, \quad y_1 > 1 \quad (67)$$

$$y_2 \in E, \quad y_2 > 1 \quad (68)$$

以集合 P 中各元素为模数, 求得同余式组:

$$x \equiv x_i \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$y_1 \equiv y_{1i} \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$y_2 \equiv y_{2i} \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$x \in N_B$, 根据筛选条件 (3), (4), (5) 式可知

$$x_i \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (69)$$

$$x_i \neq A_i + 1, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (70)$$

$$x_i \neq A_i - 1, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (71)$$

依据同余式的性质, 由 (64) 和 (65) 式推得

$$y_{1i} \equiv A_i - x_i + 1 \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (72)$$

$$y_{2i} \equiv A_i - x_i - 1 \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (73)$$

由 (70) 式和 (72) 式可知

$$y_{1i} \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (74)$$

由 (71) 式和 (73) 式可知

$$y_{2i} \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (75)$$

根据第一章引理 3, 由 (66) 和 (69) 式可知: x 为奇素数。

根据第一章引理 3, 由 (67) 和 (74) 式可知: y_1 为奇素数。

根据第一章引理 3, 由 (68) 和 (75) 式可知: y_2 为奇素数。

将 (64) 和 (65) 式两端相减, 得

$$y_1 - y_2 = 2 \quad (76)$$

由 (76) 式可见, y_1 和 y_2 为一对孪生素数。用 y_3 表示该对孪生素数的中值, 则

$$y_3 = (y_1 + y_2) / 2 = A - x \quad (77)$$

由 (77) 式移项可得

$$A = x + y_3 \quad (78)$$

(78) 式即为所要求证的数学表达式, 式中奇素数 A 表示为奇素数 x 与孪生素数中值 y_3 之和。

x 为集合 N_B 中任取的一个小于 $A-3$ 的元素, 故 N_B 中每个小于 $A-3$ 的元素都对应一组解 (一个素数和一个孪生素数中值)。

(关于小于 10211 的奇素数 (大于 5) 可用数值验算方法得到求证。)

5.2 求解程序

下面是用 ASP 写的求解程序, 包括输入界面和运算显示两个文件:

第一个文件 (input.asp):

```
<html>
<head>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=
gb2312">
<LINK href="/style.css" type=text/css rel=stylesheet>
<title>素数的分项表示问题</title>
<script language="JavaScript" >
function suborno(){
    var a=form1.a.value;
    if(a=="||a==null){
        alert("请输入素数 (101 以上)! ");
        return;
    }else if(parseInt(a)<101){
        alert("对不起, 输入的数必须是 101 以上的素数! ");
        return;
    }else{
        var flag=1;
        for(j=2;j<=((parseInt(a))/2);j++)
        {
            if(a%j==0)
            {
                flag=0;
                break;
            }
        }
        if(flag==0){
            alert("对不起, 输入的数必须是 101 以上的素数! ");
        }
        return;
    }
}
```



```

</form>
<p align="center">&nbsp;&nbsp;&nbsp;</p>
</body>
</html>

```

第二个文件 (sievejs.asp):

```

<%a=clng(request.form("a"))
%>
<html>
<head>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=
gb2312">
<LINK href="/.style.css" type=text/css rel=stylesheet>
<title>素数的分项表示问题</title>
</head>
<body bgcolor="#BFC0B6"><br>&nbsp;&nbsp;&nbsp;<br>&nbsp;&nbsp;&nbsp;<br>&nbsp;&nbsp;&nbsp;
<div align="center" id="wait_div"><font color="#FF0000"
size="4"><strong>如果出现提示“.....是否取消该脚本？”，请点
击“否”，请耐心等待！</strong></font></div>
<div align="center" id="wait2_div" style="display:none"><font
color="#FF0000" size="5"><strong>素数的分项表示问题求解运算
结果</strong></font></div>
<p><script language="JavaScript">
var a, i,pi,j,flag,ni,n,m,x,y,k,pr,ther,num1,num2,num3;
//var array_ni = new Array();
var array_pi = new Array();
//var array_pi2 = new Array();
var array_n = new Array();

```

```
var array_ai = new Array();
//var array_hi = new Array();
//var array_pi_ni = new Array()
//a=clng(request.form("a"))
num1=0;
num2=0;
num3=0;
a=parseInt("<%=a%>");
if(parseInt(a)<101){
    alert("对不起，输入的数必须是 101 以上的素数！");
}else{
    var flag=1;
    for(j=2;j<=((parseInt(a))/2);j++){
        {
            if(a%j==0)
            {
                flag=0;
                break;
            }
        }
    }
    if(flag==0){
        alert("对不起，输入的数必须是 101 以上的素数！");
    }else{
        document.write("<font color=#FF0000 size='4'>输入的素数 a
为：</font><font color=#8000FF size=4>"+a+"</font><br>");
        n=parseInt(a/2);
        //alert(n);
        pr=Math.sqrt(a);
        pr=parseInt(pr);
        //i=0
```

```
//var i1=1;
//var i2=1;
ther=0;
i=0
//alert(pr);
for(pi=2;pi<=pr;pi++)
{
    //alert(array_pi[i]);
    flag=1;
    for(j=2;j<=(pi/2);j++)
    {
        if(pi%j==0)
        {
            flag=0;
            break;
        }
    }
    if(flag==1)
    {
        //ni=n%pi;
        //array_ni[i]=ni;
        array_pi[i]=pi;
        //array_pi2[i]=pi;
        array_ai[i]=a%pi;
        //array_pi_ni[i]=pi-ni
        //alert(array_pi[i]);
        i++;
    }
}

ther=i;
```

```

for(i=0,j=array_pi[ther-1]+1;j<a-3;i++,j++){
    array_n[i]=j;
    //alert(array_n[i]);
}

for(i=0;i<array_n.length;i++)
{
    for(k=0;k<array_pi.length;k++)
    {

        if((array_n[i]%array_pi[k]==0)||((array_n[i]%array_pi[k]==array_ai[k]+1)||
        (array_n[i]%array_pi[k]==array_ai[k]-1)))
        {
            array_n[i]=0;
            break;
        }

    }
}
x=0;
for(i=0;i<array_n.length;i++){
    if(array_n[i]>0)
    x++;
    //alert(array_n[i]);
}

document.write("<br><font color=#0000FF size=3>从集合 N
中求得的解的个数为: </font>" + x + "<br>");
if(x>0){
    document.write("<font color=#0000FF size=3>从集合 N 中求
得的解: </font><br>");
}

```

```
var astr=new String(a);  
var thelength=astr.length;  
var x11,y11,y22;  
m=1;  
for(i=0;i<array_n.length;i++)  
{  
    switch(array_n[i])  
    {  
        case 0: break;  
        default:  
            x1=array_n[i];  
            y1=a-array_n[i]+1;  
            y2=a-array_n[i]-1;  
            x11=new String(x1);  
            for(var iii=x11.length;iii<thelength;iii++){  
                x11="0"+" "+x11;  
            }  
            y11=new String(y1);  
            for(var iii=y11.length;iii<thelength;iii++){  
                y11="0"+" "+y11;  
            }  
            y22=new String(y2);  
            for(var iii=y22.length;iii<thelength;iii++){  
                y22="0"+" "+y22;  
            }  
            document.write("<font  
size='4'>x</font>="+x11+" <font size='4'>y</font>1="+y11+"<font  
size='4'>y</font>2="+y22+";   &nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&~");  
            if(m%2==0)  
            {  
                document.write("<br>");
```

```

        }
        m=m+1;
    }

}

}

document.all("wait_div").style.display="none";
document.all("wait2_div").style.display="";
}}
</script>
</p></body>
</html>

```

5.3 实筛数据

输入的素数 a 为: 101

从集合 N 中求得的解的个数为: 6

从集合 N 中求得的解:

```

x=029 y1=073 y2=071   x=041 y1=061 y2=059
x=059 y1=043 y2=041   x=071 y1=031 y2=029
x=083 y1=019 y2=017   x=089 y1=013 y2=011

```

输入的素数 a 为: 9929

从集合 N 中求得的解的个数为: 74

从集合 N 中求得的解:

```

x=0251 y1=9679 y2=9677   x=0467 y1=9463 y2=9461
x=0491 y1=9439 y2=9437   x=0509 y1=9421 y2=9419
x=0587 y1=9343 y2=9341   x=0647 y1=9283 y2=9281
x=0887 y1=9043 y2=9041   x=0929 y1=9001 y2=8999

```

$x=1091$	$y_1=8839$	$y_2=8837$	$x=1109$	$y_1=8821$	$y_2=8819$
$x=1301$	$y_1=8629$	$y_2=8627$	$x=1499$	$y_1=8431$	$y_2=8429$
$x=1637$	$y_1=8293$	$y_2=8291$	$x=1697$	$y_1=8233$	$y_2=8231$
$x=1709$	$y_1=8221$	$y_2=8219$	$x=1979$	$y_1=7951$	$y_2=7949$
$x=2339$	$y_1=7591$	$y_2=7589$	$x=2381$	$y_1=7549$	$y_2=7547$
$x=2441$	$y_1=7489$	$y_2=7487$	$x=2579$	$y_1=7351$	$y_2=7349$
$x=2621$	$y_1=7309$	$y_2=7307$	$x=2801$	$y_1=7129$	$y_2=7127$
$x=2969$	$y_1=6961$	$y_2=6959$	$x=3137$	$y_1=6793$	$y_2=6791$
$x=3167$	$y_1=6763$	$y_2=6761$	$x=3359$	$y_1=6571$	$y_2=6569$
$x=3659$	$y_1=6271$	$y_2=6269$	$x=3797$	$y_1=6133$	$y_2=6131$
$x=4049$	$y_1=5881$	$y_2=5879$	$x=4079$	$y_1=5851$	$y_2=5849$
$x=4271$	$y_1=5659$	$y_2=5657$	$x=4289$	$y_1=5641$	$y_2=5639$
$x=4409$	$y_1=5521$	$y_2=5519$	$x=4451$	$y_1=5479$	$y_2=5477$
$x=4649$	$y_1=5281$	$y_2=5279$	$x=4919$	$y_1=5011$	$y_2=5009$
$x=5279$	$y_1=4651$	$y_2=4649$	$x=5381$	$y_1=4549$	$y_2=4547$
$x=5507$	$y_1=4423$	$y_2=4421$	$x=5591$	$y_1=4339$	$y_2=4337$
$x=5657$	$y_1=4273$	$y_2=4271$	$x=5669$	$y_1=4261$	$y_2=4259$
$x=5711$	$y_1=4219$	$y_2=4217$	$x=5801$	$y_1=4129$	$y_2=4127$
$x=5879$	$y_1=4051$	$y_2=4049$	$x=5927$	$y_1=4003$	$y_2=4001$
$x=6011$	$y_1=3919$	$y_2=3917$	$x=6257$	$y_1=3673$	$y_2=3671$
$x=6389$	$y_1=3541$	$y_2=3539$	$x=6569$	$y_1=3361$	$y_2=3359$
$x=6599$	$y_1=3331$	$y_2=3329$	$x=6761$	$y_1=3169$	$y_2=3167$
$x=6959$	$y_1=2971$	$y_2=2969$	$x=7127$	$y_1=2803$	$y_2=2801$
$x=7547$	$y_1=2383$	$y_2=2381$	$x=7589$	$y_1=2341$	$y_2=2339$
$x=7691$	$y_1=2239$	$y_2=2237$	$x=7817$	$y_1=2113$	$y_2=2111$
$x=7841$	$y_1=2089$	$y_2=2087$	$x=7901$	$y_1=2029$	$y_2=2027$
$x=8231$	$y_1=1699$	$y_2=1697$	$x=8447$	$y_1=1483$	$y_2=1481$
$x=8501$	$y_1=1429$	$y_2=1427$	$x=8609$	$y_1=1321$	$y_2=1319$
$x=8627$	$y_1=1303$	$y_2=1301$	$x=8699$	$y_1=1231$	$y_2=1229$
$x=8837$	$y_1=1093$	$y_2=1091$	$x=8867$	$y_1=1063$	$y_2=1061$
$x=9311$	$y_1=0619$	$y_2=0617$	$x=9467$	$y_1=0463$	$y_2=0461$

$x=9497 \ y_1=0433 \ y_2=0431 \quad x=9689 \ y_1=0241 \ y_2=0239$

$x=9749 \ y_1=0181 \ y_2=0179 \quad x=9791 \ y_1=0139 \ y_2=0137$

输入的素数 a 为: 31153

从集合 N 中求得的解的个数为: 136

从集合 N 中求得的解:

$x=00283 \ y_1=30871 \ y_2=30869 \quad x=00313 \ y_1=30841 \ y_2=30839$

$x=00661 \ y_1=30493 \ y_2=30491 \quad x=00883 \ y_1=30271 \ y_2=30269$

$x=01063 \ y_1=30091 \ y_2=30089 \quad x=01483 \ y_1=29671 \ y_2=29669$

$x=01753 \ y_1=29401 \ y_2=29399 \quad x=02131 \ y_1=29023 \ y_2=29021$

$x=02803 \ y_1=28351 \ y_2=28349 \quad x=02971 \ y_1=28183 \ y_2=28181$

$x=03361 \ y_1=27793 \ y_2=27791 \quad x=03463 \ y_1=27691 \ y_2=27689$

$x=03571 \ y_1=27583 \ y_2=27581 \quad x=03613 \ y_1=27541 \ y_2=27539$

$x=03673 \ y_1=27481 \ y_2=27479 \quad x=04093 \ y_1=27061 \ y_2=27059$

$x=04201 \ y_1=26953 \ y_2=26951 \quad x=04261 \ y_1=26893 \ y_2=26891$

$x=04273 \ y_1=26881 \ y_2=26879 \quad x=04423 \ y_1=26731 \ y_2=26729$

$x=04441 \ y_1=26713 \ y_2=26711 \quad x=04903 \ y_1=26251 \ y_2=26249$

$x=05683 \ y_1=25471 \ y_2=25469 \quad x=05743 \ y_1=25411 \ y_2=25409$

$x=05851 \ y_1=25303 \ y_2=25301 \quad x=06121 \ y_1=25033 \ y_2=25031$

$x=06733 \ y_1=24421 \ y_2=24419 \quad x=06781 \ y_1=24373 \ y_2=24371$

$x=07243 \ y_1=23911 \ y_2=23909 \quad x=07321 \ y_1=23833 \ y_2=23831$

$x=07411 \ y_1=23743 \ y_2=23741 \quad x=07591 \ y_1=23563 \ y_2=23561$

$x=07951 \ y_1=23203 \ y_2=23201 \quad x=08191 \ y_1=22963 \ y_2=22961$

$x=08293 \ y_1=22861 \ y_2=22859 \quad x=08581 \ y_1=22573 \ y_2=22571$

$x=09043 \ y_1=22111 \ y_2=22109 \quad x=09631 \ y_1=21523 \ y_2=21521$

$x=09661 \ y_1=21493 \ y_2=21491 \quad x=10093 \ y_1=21061 \ y_2=21059$

$x=10141 \ y_1=21013 \ y_2=21011 \quad x=10513 \ y_1=20641 \ y_2=20639$

$x=10711 \ y_1=20443 \ y_2=20441 \quad x=11131 \ y_1=20023 \ y_2=20021$

$x=11161 \ y_1=19993 \ y_2=19991 \quad x=11311 \ y_1=19843 \ y_2=19841$

$x=11731 \ y_1=19423 \ y_2=19421 \quad x=11941 \ y_1=19213 \ y_2=19211$

$x=11971 \ y_1=19183 \ y_2=19181 \quad x=12073 \ y_1=19081 \ y_2=19079$

$x=12241$	$y_1=18913$	$y_2=18911$	$x=12613$	$y_1=18541$	$y_2=18539$
$x=12841$	$y_1=18313$	$y_2=18311$	$x=13033$	$y_1=18121$	$y_2=18119$
$x=13093$	$y_1=18061$	$y_2=18059$	$x=13963$	$y_1=17191$	$y_2=17189$
$x=14173$	$y_1=16981$	$y_2=16979$	$x=14251$	$y_1=16903$	$y_2=16901$
$x=14323$	$y_1=16831$	$y_2=16829$	$x=14461$	$y_1=16693$	$y_2=16691$
$x=14503$	$y_1=16651$	$y_2=16649$	$x=14923$	$y_1=16231$	$y_2=16229$
$x=15013$	$y_1=16141$	$y_2=16139$	$x=15091$	$y_1=16063$	$y_2=16061$
$x=15511$	$y_1=15643$	$y_2=15641$	$x=15823$	$y_1=15331$	$y_2=15329$
$x=16561$	$y_1=14593$	$y_2=14591$	$x=16603$	$y_1=14551$	$y_2=14549$
$x=16831$	$y_1=14323$	$y_2=14321$	$x=16903$	$y_1=14251$	$y_2=14249$
$x=17431$	$y_1=13723$	$y_2=13721$	$x=17443$	$y_1=13711$	$y_2=13709$
$x=18541$	$y_1=12613$	$y_2=12611$	$x=18913$	$y_1=12241$	$y_2=12239$
$x=19081$	$y_1=12073$	$y_2=12071$	$x=19183$	$y_1=11971$	$y_2=11969$
$x=19213$	$y_1=11941$	$y_2=11939$	$x=19603$	$y_1=11551$	$y_2=11549$
$x=19801$	$y_1=11353$	$y_2=11351$	$x=19993$	$y_1=11161$	$y_2=11159$
$x=20443$	$y_1=10711$	$y_2=10709$	$x=21013$	$y_1=10141$	$y_2=10139$
$x=21061$	$y_1=10093$	$y_2=10091$	$x=21433$	$y_1=09721$	$y_2=09719$
$x=21523$	$y_1=09631$	$y_2=09629$	$x=21871$	$y_1=09283$	$y_2=09281$
$x=22111$	$y_1=09043$	$y_2=09041$	$x=22153$	$y_1=09001$	$y_2=08999$
$x=22291$	$y_1=08863$	$y_2=08861$	$x=22861$	$y_1=08293$	$y_2=08291$
$x=22921$	$y_1=08233$	$y_2=08231$	$x=23143$	$y_1=08011$	$y_2=08009$
$x=23203$	$y_1=07951$	$y_2=07949$	$x=23563$	$y_1=07591$	$y_2=07589$
$x=23593$	$y_1=07561$	$y_2=07559$	$x=24373$	$y_1=06781$	$y_2=06779$
$x=24391$	$y_1=06763$	$y_2=06761$	$x=24793$	$y_1=06361$	$y_2=06359$
$x=25303$	$y_1=05851$	$y_2=05849$	$x=25411$	$y_1=05743$	$y_2=05741$
$x=25633$	$y_1=05521$	$y_2=05519$	$x=25873$	$y_1=05281$	$y_2=05279$
$x=26053$	$y_1=05101$	$y_2=05099$	$x=26431$	$y_1=04723$	$y_2=04721$
$x=26731$	$y_1=04423$	$y_2=04421$	$x=26881$	$y_1=04273$	$y_2=04271$
$x=26893$	$y_1=04261$	$y_2=04259$	$x=27061$	$y_1=04093$	$y_2=04091$
$x=27103$	$y_1=04051$	$y_2=04049$	$x=27481$	$y_1=03673$	$y_2=03671$
$x=27691$	$y_1=03463$	$y_2=03461$	$x=27763$	$y_1=03391$	$y_2=03389$

$x=27793$	$y_1=03361$	$y_2=03359$	$x=27823$	$y_1=03331$	$y_2=03329$
$x=27901$	$y_1=03253$	$y_2=03251$	$x=28183$	$y_1=02971$	$y_2=02969$
$x=28351$	$y_1=02803$	$y_2=02801$	$x=28603$	$y_1=02551$	$y_2=02549$
$x=28771$	$y_1=02383$	$y_2=02381$	$x=28813$	$y_1=02341$	$y_2=02339$
$x=28843$	$y_1=02311$	$y_2=02309$	$x=29023$	$y_1=02131$	$y_2=02129$
$x=29221$	$y_1=01933$	$y_2=01931$	$x=29671$	$y_1=01483$	$y_2=01481$
$x=29833$	$y_1=01321$	$y_2=01319$	$x=29851$	$y_1=01303$	$y_2=01301$
$x=29863$	$y_1=01291$	$y_2=01289$	$x=30091$	$y_1=01063$	$y_2=01061$
$x=30103$	$y_1=01051$	$y_2=01049$	$x=30133$	$y_1=01021$	$y_2=01019$
$x=30271$	$y_1=00883$	$y_2=00881$	$x=30493$	$y_1=00661$	$y_2=00659$
$x=30553$	$y_1=00601$	$y_2=00599$	$x=30631$	$y_1=00523$	$y_2=00521$
$x=30841$	$y_1=00313$	$y_2=00311$	$x=30871$	$y_1=00283$	$y_2=00281$

第六章 孪生素数

“孪生素数猜想”猜想孪生素数有无限多对。“孪生素数猜想”与“哥德巴赫猜想”和“黎曼猜想”同属希尔伯特(Hilbert)第八问题。长期以来广受关注,但还未得到公认解决。现探讨如下。

6.1 求解证明

设 A 为大于 10000 的任意正整数,将不超过 A 的全部正整数集合用 E 表示。则集合 E 的基数 $|E|$ 等于 A

$$|E| = A \quad (1)$$

以埃氏筛法求得不超过 $A^{1/2}$ 的全部素数集合 P ,并将 P 中元素按数值大小顺序排列如下:

$$P = (p_1, p_2, \dots, p_r)$$

$$2 = p_1 < p_2 < \dots < p_r \leq A^{1/2} \quad (2)$$

用筛选方法从集合 E 中分选出必要的子集。

给定筛选条件:

$$g \not\equiv 0 \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (3)$$

$$g \not\equiv 2 \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (4)$$

g 表示集合 E 中被选元素。

从集合 E 中将同时符合 (3), (4) 式的元素分选出来,组成子集 E_B , 再来讨论子集 E_B 的基数 $|E_B|$ (筛函数)。

6.1.1 求证筛函数的下界

集合 E 为自然数列集合,集合 P 中的元素为互不相同的素

数。根据第一章的公式 (61) 式可知, 基数 $|E_B|$ 的近似估算式为:

$$|E_B| = A \prod_{i=1}^r \left(\frac{\alpha_i}{p_i} \right) \quad (5)$$

根据第一章的公式 (72) 式可知, 基数 $|E_B|$ 的下界表达式为:

$$|E_B| > A \prod_{i=1}^r \left(\frac{A - p_i}{A} \right) \left(\frac{\alpha_i}{p_i} \right) \quad (6)$$

式中 α_i 为根据筛选条件所选取的模 p_i 的同余类子集的个数, 下面根据筛选条件 (3), (4) 式来讨论 α_i 的具体数值。

当 $i=1$ 时, $p_1=2$ 故知

$$0 \equiv 2 \pmod{p_1}$$

所以, 此时 (3) 式与 (4) 式等同, 可合为一个条件。据此, 由 (3) 式可知, 集合 E 中只有模 p_1 的“1 同余类子集”符合筛选条件, 应被选取, 由此得出

$$\alpha_1 = 1 \quad (7)$$

当 $i>1$ 时, (3), (4) 式为两个不同的条件, 由该两个不同的筛选条件决定了模 p_i 的“0 同余类子集”和“2 同余类子集”都不符合条件, 应当筛掉, 被选取的是其余 (p_i-2) 个模 p_i 的同余类子集, 由此得出

$$\alpha_i = p_i - 2 \quad (i > 1) \quad (8)$$

将 (7), (8) 代入 (5) 式得

$$|E_B| = \left(\frac{A}{2} \right) \prod_{i=2}^r \left(\frac{p_i - 2}{p_i} \right) \quad (9)$$

将 (7), (8) 代入 (6) 式得

$$|E_B| > F_1 \left(\frac{A}{2} \right) \prod_{i=2}^r \left(\frac{p_i - 2}{p_i} \right) \quad (10)$$

$$F_1 = \prod_{i=1}^r (1 - \frac{p_i}{A}) > 1 - (\frac{1}{A}) \sum_{i=1}^r p_i \quad (11)$$

由第一章 (77) 式可以推得

$$\Pi(x) - \Pi(\frac{x}{2}) < \Pi(\frac{x}{2}) \quad (12)$$

由 (12) 式知, 数值越大的区域, 素数分布的密度越小, 由此可得

$$\sum_{i=1}^r p_i < (\frac{1}{2})(p_1 + p_r) \Pi(p_r) \quad (13)$$

由第一章 (82) 式可得

$$\Pi(p_r) < 6 \ln 2 (\frac{p_r}{\ln p_r}) \quad (14)$$

$$\text{即有 } \sum_{i=1}^r p_i < 3 \ln 2 (p_1 + p_r) \frac{p_r}{\ln p_r} \quad (15)$$

(15) 代入 (11) 式, 再代入 (10) 式得

$$|E_B| > (\frac{A}{2}) \prod_{i=2}^r (\frac{p_i - 2}{p_i}) - \{ \frac{3 \ln 2 (p_1 + p_r) p_r}{2 \ln p_r} \} \prod_{i=2}^r (\frac{p_i - 2}{p_i}) \quad (16)$$

将 $A/2$ 作以下变换:

$$A/2 = (A/2) \{p_2 / (p_3 - 2)\} \quad (17)$$

$$A/2 = (A/2) \{p_3 / (p_4 - 2)\} \quad (18)$$

$$A/2 = (A/2) \{p_4 / (p_5 - 2)\} + A / (p_5 - 2) \quad (19)$$

$$A/2 = (A/2) \{p_5 / (p_6 - 2)\} \quad (20)$$

$$A/2 = (A/2) \{p_6 / (p_7 - 2)\} + A / (p_7 - 2) \quad (21)$$

$$A/2 = (A/2) \{p_7 / (p_8 - 2)\} \quad (22)$$

$$A/2 = (A/2) \{p_8 / (p_9 - 2)\} + A / (p_9 - 2) \quad (23)$$

$$A/2 = (A/2) \{p_9 / (p_{10} - 2)\} + 2A / (p_{10} - 2) \quad (24)$$

$$A/2 = (A/2)\{p_{10}/(p_{11}-2)\} \quad (25)$$

$$A/2 = (A/2)\{p_{11}/(p_{12}-2)\} + 2A/(p_{12}-2) \quad (26)$$

$$A/2 = (A/2)\{p_{12}/(p_{13}-2)\} + A/(p_{13}-2) \quad (27)$$

$$A/2 = (A/2)\{p_{13}/(p_{14}-2)\} \quad (28)$$

$$A/2 = (A/2)\{p_{14}/(p_{15}-2)\} + A/(p_{15}-2) \quad (29)$$

$$A/2 = (A/2)\{p_{15}/(p_{16}-2)\} + 2A/(p_{16}-2) \quad (30)$$

$$A/2 = (A/2)\{p_{16}/(p_{17}-2)\} + 2A/(p_{17}-2) \quad (31)$$

$$A/2 = (A/2)\{p_{17}/(p_{18}-2)\} \quad (32)$$

$$A/2 = (A/2)\{p_{18}/(p_{19}-2)\} + 2A/(p_{19}-2) \quad (33)$$

$$A/2 = (A/2)\{p_{19}/(p_{20}-2)\} + A/(p_{20}-2) \quad (34)$$

$$A/2 = (A/2)\{p_{20}/(p_{21}-2)\} \quad (35)$$

$$A/2 = (A/2)\{p_{21}/(p_{22}-2)\} + 2A/(p_{22}-2) \quad (36)$$

$$A/2 = (A/2)\{p_{22}/(p_{23}-2)\} + A/(p_{23}-2) \quad (37)$$

$$A/2 = (A/2)\{p_{23}/(p_{24}-2)\} + 2A/(p_{24}-2) \quad (38)$$

$$A/2 = (A/2)\{p_{24}/(p_{25}-2)\} + 3A/(p_{25}-2) \quad (39)$$

将 (17), (18), …… , (39) 式逐次代入, 可得

$$A/2 = \frac{A}{2} \prod_{i=3}^{25} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i - 2} \right) + F_2 \quad (40)$$

$$\begin{aligned} F_2 = & \left(\frac{A}{p_5 - 2} \right) \prod_{i=6}^{25} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i - 2} \right) + \left(\frac{A}{p_7 - 2} \right) \prod_{i=8}^{25} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i - 2} \right) + \\ & \left(\frac{A}{p_9 - 2} \right) \prod_{i=10}^{25} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i - 2} \right) + \left(\frac{2A}{p_{10} - 2} \right) \prod_{i=11}^{25} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i - 2} \right) + \\ & \left(\frac{2A}{p_{12} - 2} \right) \prod_{i=13}^{25} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i - 2} \right) + \left(\frac{A}{p_{13} - 2} \right) \prod_{i=14}^{25} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i - 2} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{A}{p_{15}-2}\right)\prod_{i=16}^{25}\left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right)+\left(\frac{2A}{p_{16}-2}\right)\prod_{i=17}^{25}\left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right)+ \\
& \left(\frac{2A}{p_{17}-2}\right)\prod_{i=18}^{25}\left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right)+\left(\frac{2A}{p_{19}-2}\right)\prod_{i=20}^{25}\left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right)+ \\
& \left(\frac{A}{p_{20}-2}\right)\prod_{i=21}^{25}\left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right)+\left(\frac{2A}{p_{22}-2}\right)\prod_{i=23}^{25}\left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right)+ \\
& \left(\frac{A}{p_{23}-2}\right)\prod_{i=24}^{25}\left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right)+\left(\frac{2A}{p_{24}-2}\right)\left(\frac{p_{24}}{p_{25}-2}\right)+\left(\frac{3A}{p_{25}-2}\right) \quad (41)
\end{aligned}$$

将 $p_5=11$, $p_6=13$, $p_7=17$, $p_8=19$, $p_9=23$, $p_{10}=29$,
 $p_{11}=31$, $p_{12}=37$, $p_{13}=41$, $p_{14}=43$, $p_{15}=47$, $p_{16}=53$,
 $p_{17}=59$, $p_{18}=61$, $p_{19}=67$, $p_{20}=71$, $p_{21}=73$, $p_{22}=79$,
 $p_{23}=83$, $p_{24}=89$, $p_{25}=97$ 代入 (41) 式得

$$F_2 = 0.3654A \quad (42)$$

将 (42) 代入 (40) 式, 得

$$A/2 = \left(\frac{A}{2}\right)\prod_{i=3}^{25}\left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right) + 0.3654A \quad (43)$$

将 (43) 代入 (16) 式得

$$\begin{aligned}
|E_B| & > \left(\frac{A}{2}\right)\prod_{j=3}^{25}\left\{\frac{p_{j-1}}{p_j-2}\right\}\prod_{i=2}^r\left\{\frac{p_i-2}{p_i}\right\} + \\
& \left\{0.3654A - \frac{(3\ln 2)(p_1+p_r)p_r}{2\ln p_r}\right\}\prod_{i=2}^r\left\{\frac{p_i-2}{p_i}\right\} \quad (44)
\end{aligned}$$

$$\text{由 (2) 式知} \quad A \geq p_r^2 \quad (45)$$

由 (44) 和 (45) 式得

$$|E_B| > \left(\frac{A}{2}\right)\prod_{j=3}^{25}\left(\frac{p_{j-1}}{p_j-2}\right)\prod_{i=2}^r\left(\frac{p_i-2}{p_i}\right) + F_3 \quad (46)$$

$$F_3 = \{0.3654p_r - \frac{(3\ln 2)(p_1 + p_r)}{2\ln p_r}\} p_r \prod_{i=2}^r \left(\frac{p_i - 2}{p_i}\right) \quad (47)$$

$$\text{令 } F_4 = 0.3654p_r - \frac{(3\ln 2)(p_1 + p_r)}{2\ln p_r} \quad (48)$$

$$\text{则 } F_3 = F_4 p_r \prod_{i=2}^r \left\{ \frac{p_i - 2}{p_i} \right\} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \frac{dF_4}{dp_r} &= 0.3654 - \left(\frac{3\ln 2}{2}\right) \left\{ \frac{\ln p_r - (p_1 + p_r)(1/p_r)}{\ln^2 p_r} \right\} = \\ &0.3654 - \frac{3\ln 2}{2\ln p_r} + \frac{(3\ln 2)(p_1 + p_r)}{2p_r \ln^2 p_r} > 0.3654 - \frac{3\ln 2}{2\ln p_r} \end{aligned} \quad (50)$$

$$\text{命 } 0.3654 - \frac{3\ln 2}{2\ln p_r} > 0$$

$$\text{得 } p_r > e^{2.8454} = 17.21 \quad (51)$$

将条件 (51) 式代入 (50) 式得

$$\frac{dF_4}{dp_r} > 0 \quad (p_r > 17.21) \quad (52)$$

(52) 式表明当 $p_r > 17.21$ 时, F_4 为 p_r 的增值函数。

当 $A \geq 10000$ 时, $p_r \geq 97 > 17.21$ 。

将 $p_r = 97$ 代入 (48) 式得

$$F_4(p_r = 97) = 12.9 > 1 \quad (p_r = 97) \quad (53)$$

$$\text{故知 } F_4 > 1 \quad (A \geq 10000) \quad (54)$$

将 (54) 式代入 (49) 式得

$$F_3 > p_r \prod_{i=2}^r \left(\frac{p_i - 2}{p_i}\right) = \frac{p_r}{3} \prod_{i=3}^r \left(\frac{p_i - 2}{p_i}\right) \quad (55)$$

$$\text{已知 } p_i - 2 \geq p_{i-1} \quad (i \geq 3) \quad (56)$$

(56) 式代入 (55) 式得

$$F_3 > \frac{p_r}{3} \prod_{i=3}^r \left(\frac{p_{i-1}}{p_i} \right) = 1 \quad (57)$$

(57) 式代入 (46) 式得

$$|E_B| > \left(\frac{A}{2} \right) \left(\frac{1}{3} \right) \prod_{j=3}^{25} \left(\frac{p_{j-1}}{p_j - 2} \right) \prod_{i=3}^r \left(\frac{p_i - 2}{p_i} \right) + 1 \quad (58)$$

由 (56) 式和 (58) 式知

$$|E_B| > \left(\frac{A}{6} \right) \prod_{i=3}^r \left(\frac{p_{i-1}}{p_i} \right) + 1 = \left(\frac{A}{6} \right) \left(\frac{3}{p_r} \right) + 1 \quad (59)$$

将 (45) 式代入 (59) 式, 得

$$|E_B| > \left(\frac{p_r}{2} \right) + 1 \quad (60)$$

将集合 E_B 中的元素 1 扣除掉, 根据 (60) 式可知, 集合 E_B 中不为 1 的元素个数应是,

$$|E_B| - 1 > \frac{p_r}{2} \quad (61)$$

6.1.2 通过子集 E_B 求解

从集合 E_B 中任取一个数值不为 1 的元素 x , 则

$$x \in E, \quad x > 1 \quad (62)$$

再引入参量 y

$$y = x - 2 \quad (63)$$

$$\text{显然 } y \in E, \quad y > 1 \quad (64)$$

以集合 P 中各元素为模数。求得同余式组:

$$x \equiv x_i \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (65)$$

$$y \equiv y_i \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (66)$$

由于 $x \in E_B$, 根据筛选条件 (3) 式可知

$$x_i \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (67)$$

根据筛选条件 (4) 式可知

$$x_i \neq 2, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (68)$$

依据同余式的性质, 由 (63) 式推得

$$y_i \equiv x_i - 2 \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (69)$$

由 (68) 式和 (69) 式可知

$$y_i \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (70)$$

根据第一章中引理 3, 由 (62) 式和 (67) 式可知, x 为奇素数。

根据第一章中引理 3, 由 (64) 式和 (70) 式可知, y 为奇素数。

由 (63) 式移项可得

$$x - y = 2 \quad (71)$$

由 (71) 式可见, (x, y) 为一对孪生素数。

x 为集合 E_B 中随意一个数值不为 1 的元素, 由 (61) 式知, 集合 E_B 中数值不为 1 的元素个数不少于 $(p_r/2)$ 个, 据此推得。

孪生素数分布定律: 不超过正整数 A ($A \geq 10000$) 的孪生素数不少于 $(p_r/2)$ 对, (p_r 为不超过 $A^{1/2}$ 的最大素数)。

6.2 孪生素数的无限性

由 (67) 式和 (70) 式可知

$$x > p_r \quad (72)$$

$$y > p_r \quad (73)$$

根据定义, p_r 为不超过 $A^{1/2}$ 的最大素数, 所以大于 p_r 的素数必定大于 $A^{1/2}$ 。由于 x 和 y 都是素数, 故知:

$$x > A^{1/2} \quad (74)$$

$$y > A^{1/2} \quad (75)$$

由(74)式和(75)式可见, 集合 E_B 中不为 1 的元素所对应的孪生素数 (x, y) 应在区间 $(A^{1/2}, A)$ 之内。即, 在区间 $(A^{1/2}, A)$ 之内, 孪生素数不少于 $(p_r/2)$ 对。

若以 A^2 取代 A , 则知, 区间 (A, A^2) 内也有不少于 $(p_r/2)$ 对的孪生素数, 因为不超过 A 的最大素数必然大于不超过 $A^{1/2}$ 的最大素数。再以 A^4 取代 $A^2 \dots$, 依次类推, 当 A 的指数趋于无穷大时, 孪生素数必有无无限多对。

6.3 孪生素数的补充解

上述通过集合 E_B 求得的孪生素数, 并非集合 E 中所含全部孪生素数。其全部孪生素数还应包括下述部分。

$$\text{一、令 } p_{r+1} = p_r + 2 \quad (76)$$

以集合 P 中各元素为模数, 求得同余式组:

$$p_{r+1} \equiv (p_{r+1})_i \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (77)$$

$(p_{r+1})_i$ 为非负的最小剩余。

由(76)式知

$$p_{r+1} \in E, \quad p_{r+1} > 1 \quad (78)$$

$$\text{假若 } (p_{r+1})_i \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (79)$$

根据第一章引理 3, 由(78)式和(79)式可知: p_{r+1} 为奇素数。

将(76)式移项可得:

$$p_{r+1} - p_r = 2 \quad (80)$$

可见, (p_r, p_{r+1}) 为一对孪生素数。

二、用筛选方法从集合 P 中分选出必要的子集
给定筛选条件:

$$p_i - p_{i-1} = 2, \quad i = 3, 4, \dots, r \quad (81)$$

p_i 和 p_{i-1} 皆为集合 P 中被选元素。

从集合 P 中, 将符合 (81) 式条件的素数对分选出来组成子集 P_B 。根据筛选条件, 显然集合 P_B 中所有的素数对皆为孪生素数。

6.4 求解程序

下面给出用 ASP 写的求解程序, 分为输入界面和求解显示两个文件:

第一个文件 (input.asp):

```
<html>
<head>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html;
charset=gb2312">
<LINK href="/style.css" type=text/css rel=stylesheet>
<title>孪生素数</title>
<script language="JavaScript" >
function suborno() (
    var a=form1.a.value;
    if(a=""||a==null) (
        alert("请输入一个数字 (10000 以上)! ");
        return;
    ) else if(parseInt(a)<10000) (
        alert("输入的数字必须大于 10000! ");
        return;
    ) form1.submit();
)
</script>
```

```
</head>

<body bgcolor="#BFC0B6">
    <p align="center"><font color="#FF0000" size="4"><strong>
李生素数猜想求解程序</strong></font></p>
    <p align="center">&nbsp;</p>
    <p align="center">&nbsp;</p>
    <p align="center">如果您输入的数较大，计算时间将会较
长，请耐心等待！</p>
    <form name="form1" method="post" action="sievejs.asp">
        <table width="500" border="0" align="center" cellpadding="5"
cellspacing="0">
            <tr>
                <td width="161" align="right">请输入一个数字
(10000 以上): </td>
                <td width="319"><input name="a" type="text" id="a"> </td>
            </tr>
            <tr>
                <td align="center" colspan="2"><input type="button" name
="Submit1" value="提交" onClick="javascript:suborno();">
                    &nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&~
                    <br/>
                <input type="reset" name="Submit2" value="重置
"></td>
            </tr>
        </table>
    </form>
    <p align="center">&nbsp;</p>
</body>
</html>
```

第二个文件（sievejs.asp）:

```
<%a=clng(request.form("a"))
```



```
document.write("输入错误! ");
) else (
document.write("<font color=#FF0000 size='4'>输入的数 a
为: </font><font color=#8000FF size=4>"+a+"</font><br>");
//n=parseInt(a/2);
//alert(n);
pr=Math.sqrt(a);
pr=parseInt(pr);
//i=0
var i1=1;
//var i2=1;
ther=0;
i=0
//alert(pr);
for(pi=2;pi<=pr;pi++)
    (</alert(array_pi[i]);
    flag=1;
    for(j=2;j<=(pi/2);j++)
        (
            if(pi%j==0)
                (
                    flag=0;
                    break;
                )
        )
    )
    if(flag==1)
        (
            //ni=n%pi;
            //array_ni[i]=ni;
            array_pi[i]=pi;
```



```
//array_pi2[i]=pi;
//array_ai[i]=a%pi;
//array_pi_ni[i]=pi-ni
//alert(array_pi[i]);
i++;
    )
)

ther=i;

for(i=0;i<a-3;i++) (
    array_a[i]=i+4;
    //alert(array_n[i]);
)

for(i=0;i<a-3;i++)
(
    for(k=0;k<array_pi.length;k++)
    (
        if((array_a[i]%array_pi[k]==0)||(array_a[i]%array_pi[k]==2))
        (
            array_a[i]=0;
            break;
        )
    )
)
)

x=0;
```

```
for(i=0;i<a-3;i++) (
    if(array_a[i]>0)
        x++;
    //alert(array_n[i]);
)
var xx=0
for(i=1;i<array_pi.length;i++) (
    if(array_pi[i]-array_pi[i-1]==2) (
        array_hi[xx]=array_pi[i];
        xx++;
    )
)

var thepr2=array_pi[array_pi.length-1]+2;
var thepr2flag=1;
for(i=0;i<array_pi.length;i++) (
    if(thepr2%array_pi[i]==0) (
        thepr2flag=0;
        break;
    )
) if(thepr2flag==1) (
    array_hi[xx]=thepr2;
    xx++;
)

if(xx>0) (
    document.write("<br><font color=#0000FF size=3>从集合
```


[illegible]

```

        (
            document.write("<br>");

        )

        m=m+1;
    )

)

)

document.all("wait_div").style.display="none";
document.all("wait2_div").style.display="";
)
</script>
</p></body>
</html>

```

6.5 实筛数据

输入的数 a 为: 1000

从集合 P 中求得的孪生素数的对数为: 5

从集合 P 中求得的孪生素数对:

$x=0003 \ y=0005 \ x=0005 \ y=0007 \ x=0011 \ y=0013$

$x=0017 \ y=0019 \ x=0029 \ y=0031$

从集合 A 中求得的孪生素数的对数为: 30

从集合 A 中求得的孪生素数对:

$x=0041 \ y=0043 \ x=0059 \ y=0061 \ x=0071 \ y=0073$

$x=0101 \ y=0103 \ x=0107 \ y=0109 \ x=0137 \ y=0139$

$x=0149 \ y=0151 \ x=0179 \ y=0181 \ x=0191 \ y=0193$

$x=0197 \ y=0199 \ x=0227 \ y=0229 \ x=0239 \ y=0241$

$x=0269\ y=0271\ x=0281\ y=0283\ x=0311\ y=0313$
 $x=0347\ y=0349\ x=0419\ y=0421\ x=0431\ y=0433$
 $x=0461\ y=0463\ x=0521\ y=0523\ x=0569\ y=0571$
 $x=0599\ y=0601\ x=0617\ y=0619\ x=0641\ y=0643$
 $x=0659\ y=0661\ x=0809\ y=0811\ x=0821\ y=0823$
 $x=0827\ y=0829\ x=0857\ y=0859\ x=0881\ y=0883$

输入的数 a 为: 100000

从集合 P 中求得的孪生素数的对数为: 20

从集合 P 中求得的孪生素数对:

$x=000003\ y=000005\ x=000005\ y=000007\ x=000011\ y=000013$
 $x=000017\ y=000019\ x=000029\ y=000031\ x=000041\ y=000043$
 $x=000059\ y=000061\ x=000071\ y=000073\ x=000101\ y=000103$
 $x=000107\ y=000109\ x=000137\ y=000139\ x=000149\ y=000151$
 $x=000179\ y=000181\ x=000191\ y=000193\ x=000197\ y=000199$
 $x=000227\ y=000229\ x=000239\ y=000241\ x=000269\ y=000271$
 $x=000281\ y=000283\ x=000311\ y=000313$

从集合 A 中求得的孪生素数的对数为: 1204

从集合 A 中求得的孪生素数对:

$x=000347\ y=000349\ x=000419\ y=000421\ x=000431\ y=000433$
 $x=000461\ y=000463\ x=000521\ y=000523\ x=000569\ y=000571$
 $x=000599\ y=000601\ x=000617\ y=000619\ x=000641\ y=000643$
 $x=000659\ y=000661\ x=000809\ y=000811\ x=000821\ y=000823$
 $x=000827\ y=000829\ x=000857\ y=000859\ x=000881\ y=000883$
 $x=001019\ y=001021\ x=001031\ y=001033\ x=001049\ y=001051$
 $x=001061\ y=001063\ x=001091\ y=001093\ x=001151\ y=001153$
 $x=001229\ y=001231\ x=001277\ y=001279\ x=001289\ y=001291$
 $x=001301\ y=001303\ x=001319\ y=001321\ x=001427\ y=001429$
 $x=001451\ y=001453\ x=001481\ y=001483\ x=001487\ y=001489$

x=001607 y=001609 x=001619 y=001621 x=001667 y=001669
x=001697 y=001699 x=001721 y=001723 x=001787 y=001789
x=001871 y=001873 x=001877 y=001879 x=001931 y=001933
x=001949 y=001951 x=001997 y=001999 x=002027 y=002029
x=002081 y=002083 x=002087 y=002089 x=002111 y=002113
x=002129 y=002131 x=002141 y=002143 x=002237 y=002239
x=002267 y=002269 x=002309 y=002311 x=002339 y=002341
x=002381 y=002383 x=002549 y=002551 x=002591 y=002593
x=002657 y=002659 x=002687 y=002689 x=002711 y=002713
x=002729 y=002731 x=002789 y=002791 x=002801 y=002803
x=002969 y=002971 x=002999 y=003001 x=003119 y=003121
x=003167 y=003169 x=003251 y=003253 x=003257 y=003259
x=003299 y=003301 x=003329 y=003331 x=003359 y=003361
x=003371 y=003373 x=003389 y=003391 x=003461 y=003463
x=003467 y=003469 x=003527 y=003529 x=003539 y=003541
x=003557 y=003559 x=003581 y=003583 x=003671 y=003673
x=003767 y=003769 x=003821 y=003823 x=003851 y=003853
x=003917 y=003919 x=003929 y=003931 x=004001 y=004003
x=004019 y=004021 x=004049 y=004051 x=004091 y=004093
x=004127 y=004129 x=004157 y=004159 x=004217 y=004219
x=004229 y=004231 x=004241 y=004243 x=004259 y=004261
x=004271 y=004273 x=004337 y=004339 x=004421 y=004423
x=004481 y=004483 x=004517 y=004519 x=004547 y=004549
x=004637 y=004639 x=004649 y=004651 x=004721 y=004723
x=004787 y=004789 x=004799 y=004801 x=004931 y=004933
x=004967 y=004969 x=005009 y=005011 x=005021 y=005023
x=005099 y=005101 x=005231 y=005233 x=005279 y=005281
x=005417 y=005419 x=005441 y=005443 x=005477 y=005479
x=005501 y=005503 x=005519 y=005521 x=005639 y=005641
x=005651 y=005653 x=005657 y=005659 x=005741 y=005743
x=005849 y=005851 x=005867 y=005869 x=005879 y=005881

x=006089 y=006091 x=006131 y=006133 x=006197 y=006199
x=006269 y=006271 x=006299 y=006301 x=006359 y=006361
x=006449 y=006451 x=006551 y=006553 x=006569 y=006571
x=006659 y=006661 x=006689 y=006691 x=006701 y=006703
x=006761 y=006763 x=006779 y=006781 x=006791 y=006793
x=006827 y=006829 x=006869 y=006871 x=006947 y=006949
x=006959 y=006961 x=007127 y=007129 x=007211 y=007213
x=007307 y=007309 x=007331 y=007333 x=007349 y=007351
x=007457 y=007459 x=007487 y=007489 x=007547 y=007549
x=007559 y=007561 x=007589 y=007591 x=007757 y=007759
x=007877 y=007879 x=007949 y=007951 x=008009 y=008011
x=008087 y=008089 x=008219 y=008221 x=008231 y=008233
x=008291 y=008293 x=008387 y=008389 x=008429 y=008431
x=008537 y=008539 x=008597 y=008599 x=008627 y=008629
x=008819 y=008821 x=008837 y=008839 x=008861 y=008863
x=008969 y=008971 x=008999 y=009001 x=009011 y=009013
x=009041 y=009043 x=009239 y=009241 x=009281 y=009283
x=009341 y=009343 x=009419 y=009421 x=009431 y=009433
x=009437 y=009439 x=009461 y=009463 x=009629 y=009631
x=009677 y=009679 x=009719 y=009721 x=009767 y=009769
x=009857 y=009859 x=009929 y=009931 x=010007 y=010009
x=010037 y=010039 x=010067 y=010069 x=010091 y=010093
x=010139 y=010141 x=010271 y=010273 x=010301 y=010303
x=010331 y=010333 x=010427 y=010429 x=010457 y=010459
x=010499 y=010501 x=010529 y=010531 x=010709 y=010711
x=010859 y=010861 x=010889 y=010891 x=010937 y=010939
x=011057 y=011059 x=011069 y=011071 x=011117 y=011119
x=011159 y=011161 x=011171 y=011173 x=011351 y=011353
x=011489 y=011491 x=011549 y=011551 x=011699 y=011701
x=011717 y=011719 x=011777 y=011779 x=011831 y=011833
x=011939 y=011941 x=011969 y=011971 x=012041 y=012043

x=012071 y=012073 x=012107 y=012109 x=012161 y=012163
x=012239 y=012241 x=012251 y=012253 x=012377 y=012379
x=012539 y=012541 x=012611 y=012613 x=012821 y=012823
x=012917 y=012919 x=013001 y=013003 x=013007 y=013009
x=013217 y=013219 x=013337 y=013339 x=013397 y=013399
x=013679 y=013681 x=013691 y=013693 x=013709 y=013711
x=013721 y=013723 x=013757 y=013759 x=013829 y=013831
x=013877 y=013879 x=013901 y=013903 x=013931 y=013933
x=013997 y=013999 x=014009 y=014011 x=014081 y=014083
x=014249 y=014251 x=014321 y=014323 x=014387 y=014389
x=014447 y=014449 x=014549 y=014551 x=014561 y=014563
x=014591 y=014593 x=014627 y=014629 x=014867 y=014869
x=015137 y=015139 x=015269 y=015271 x=015287 y=015289
x=015329 y=015331 x=015359 y=015361 x=015581 y=015583
x=015641 y=015643 x=015647 y=015649 x=015731 y=015733
x=015737 y=015739 x=015887 y=015889 x=015971 y=015973
x=016061 y=016063 x=016067 y=016069 x=016139 y=016141
x=016187 y=016189 x=016229 y=016231 x=016361 y=016363
x=016451 y=016453 x=016631 y=016633 x=016649 y=016651
x=016691 y=016693 x=016829 y=016831 x=016901 y=016903
x=016979 y=016981 x=017027 y=017029 x=017189 y=017191
x=017207 y=017209 x=017291 y=017293 x=017387 y=017389
x=017417 y=017419 x=017489 y=017491 x=017579 y=017581
x=017597 y=017599 x=017657 y=017659 x=017681 y=017683
x=017747 y=017749 x=017789 y=017791 x=017837 y=017839
x=017909 y=017911 x=017921 y=017923 x=017957 y=017959
x=017987 y=017989 x=018041 y=018043 x=018047 y=018049
x=018059 y=018061 x=018119 y=018121 x=018131 y=018133
x=018251 y=018253 x=018287 y=018289 x=018311 y=018313
x=018521 y=018523 x=018539 y=018541 x=018911 y=018913
x=018917 y=018919 x=019079 y=019081 x=019139 y=019141

x=019181 y=019183 x=019211 y=019213 x=019379 y=019381
x=019421 y=019423 x=019427 y=019429 x=019469 y=019471
x=019541 y=019543 x=019697 y=019699 x=019751 y=019753
x=019841 y=019843 x=019889 y=019891 x=019961 y=019963
x=019991 y=019993 x=020021 y=020023 x=020147 y=020149
x=020231 y=020233 x=020357 y=020359 x=020441 y=020443
x=020477 y=020479 x=020507 y=020509 x=020549 y=020551
x=020639 y=020641 x=020717 y=020719 x=020747 y=020749
x=020771 y=020773 x=020807 y=020809 x=020897 y=020899
x=020981 y=020983 x=021011 y=021013 x=021017 y=021019
x=021059 y=021061 x=021191 y=021193 x=021317 y=021319
x=021377 y=021379 x=021491 y=021493 x=021521 y=021523
x=021557 y=021559 x=021587 y=021589 x=021599 y=021601
x=021611 y=021613 x=021647 y=021649 x=021737 y=021739
x=021839 y=021841 x=022037 y=022039 x=022091 y=022093
x=022109 y=022111 x=022157 y=022159 x=022271 y=022273
x=022277 y=022279 x=022367 y=022369 x=022481 y=022483
x=022541 y=022543 x=022571 y=022573 x=022619 y=022621
x=022637 y=022639 x=022697 y=022699 x=022739 y=022741
x=022859 y=022861 x=022961 y=022963 x=023027 y=023029
x=023039 y=023041 x=023057 y=023059 x=023201 y=023203
x=023291 y=023293 x=023369 y=023371 x=023537 y=023539
x=023561 y=023563 x=023627 y=023629 x=023669 y=023671
x=023687 y=023689 x=023741 y=023743 x=023831 y=023833
x=023909 y=023911 x=024107 y=024109 x=024179 y=024181
x=024371 y=024373 x=024419 y=024421 x=024917 y=024919
x=024977 y=024979 x=025031 y=025033 x=025169 y=025171
x=025301 y=025303 x=025307 y=025309 x=025409 y=025411
x=025469 y=025471 x=025577 y=025579 x=025601 y=025603
x=025799 y=025801 x=025847 y=025849 x=025931 y=025933
x=025997 y=025999 x=026111 y=026113 x=026249 y=026251

$x=026261$ $y=026263$ $x=026681$ $y=026683$ $x=026699$ $y=026701$
 $x=026711$ $y=026713$ $x=026729$ $y=026731$ $x=026861$ $y=026863$
 $x=026879$ $y=026881$ $x=026891$ $y=026893$ $x=026951$ $y=026953$
 $x=027059$ $y=027061$ $x=027107$ $y=027109$ $x=027239$ $y=027241$
 $x=027281$ $y=027283$ $x=027407$ $y=027409$ $x=027479$ $y=027481$
 $x=027527$ $y=027529$ $x=027539$ $y=027541$ $x=027581$ $y=027583$
 $x=027689$ $y=027691$ $x=027737$ $y=027739$ $x=027749$ $y=027751$
 $x=027791$ $y=027793$ $x=027917$ $y=027919$ $x=027941$ $y=027943$
 $x=028097$ $y=028099$ $x=028109$ $y=028111$ $x=028181$ $y=028183$
 $x=028277$ $y=028279$ $x=028307$ $y=028309$ $x=028349$ $y=028351$
 $x=028409$ $y=028411$ $x=028547$ $y=028549$ $x=028571$ $y=028573$
 $x=028619$ $y=028621$ $x=028661$ $y=028663$ $x=028751$ $y=028753$
 $x=029021$ $y=029023$ $x=029129$ $y=029131$ $x=029207$ $y=029209$
 $x=029387$ $y=029389$ $x=029399$ $y=029401$ $x=029567$ $y=029569$
 $x=029669$ $y=029671$ $x=029759$ $y=029761$ $x=029879$ $y=029881$
 $x=030011$ $y=030013$ $x=030089$ $y=030091$ $x=030137$ $y=030139$
 $x=030269$ $y=030271$ $x=030389$ $y=030391$ $x=030467$ $y=030469$
 $x=030491$ $y=030493$ $x=030557$ $y=030559$ $x=030839$ $y=030841$
 $x=030851$ $y=030853$ $x=030869$ $y=030871$ $x=031079$ $y=031081$
 $x=031121$ $y=031123$ $x=031151$ $y=031153$ $x=031181$ $y=031183$
 $x=031247$ $y=031249$ $x=031319$ $y=031321$ $x=031391$ $y=031393$
 $x=031511$ $y=031513$ $x=031541$ $y=031543$ $x=031721$ $y=031723$
 $x=031727$ $y=031729$ $x=031769$ $y=031771$ $x=031847$ $y=031849$
 $x=032027$ $y=032029$ $x=032057$ $y=032059$ $x=032117$ $y=032119$
 $x=032141$ $y=032143$ $x=032189$ $y=032191$ $x=032297$ $y=032299$
 $x=032321$ $y=032323$ $x=032369$ $y=032371$ $x=032411$ $y=032413$
 $x=032441$ $y=032443$ $x=032531$ $y=032533$ $x=032561$ $y=032563$
 $x=032609$ $y=032611$ $x=032717$ $y=032719$ $x=032801$ $y=032803$
 $x=032831$ $y=032833$ $x=032909$ $y=032911$ $x=032939$ $y=032941$
 $x=032969$ $y=032971$ $x=033071$ $y=033073$ $x=033149$ $y=033151$
 $x=033179$ $y=033181$ $x=033287$ $y=033289$ $x=033329$ $y=033331$

$x=033347$ $y=033349$ $x=033587$ $y=033589$ $x=033599$ $y=033601$
 $x=033617$ $y=033619$ $x=033749$ $y=033751$ $x=033767$ $y=033769$
 $x=033809$ $y=033811$ $x=033827$ $y=033829$ $x=034031$ $y=034033$
 $x=034127$ $y=034129$ $x=034157$ $y=034159$ $x=034211$ $y=034213$
 $x=034259$ $y=034261$ $x=034301$ $y=034303$ $x=034367$ $y=034369$
 $x=034469$ $y=034471$ $x=034499$ $y=034501$ $x=034511$ $y=034513$
 $x=034589$ $y=034591$ $x=034649$ $y=034651$ $x=034757$ $y=034759$
 $x=034841$ $y=034843$ $x=034847$ $y=034849$ $x=034961$ $y=034963$
 $x=035051$ $y=035053$ $x=035081$ $y=035083$ $x=035279$ $y=035281$
 $x=035447$ $y=035449$ $x=035507$ $y=035509$ $x=035531$ $y=035533$
 $x=035591$ $y=035593$ $x=035729$ $y=035731$ $x=035801$ $y=035803$
 $x=035837$ $y=035839$ $x=035897$ $y=035899$ $x=036011$ $y=036013$
 $x=036107$ $y=036109$ $x=036341$ $y=036343$ $x=036467$ $y=036469$
 $x=036527$ $y=036529$ $x=036779$ $y=036781$ $x=036791$ $y=036793$
 $x=036899$ $y=036901$ $x=036929$ $y=036931$ $x=037019$ $y=037021$
 $x=037199$ $y=037201$ $x=037307$ $y=037309$ $x=037337$ $y=037339$
 $x=037361$ $y=037363$ $x=037547$ $y=037549$ $x=037571$ $y=037573$
 $x=037589$ $y=037591$ $x=037691$ $y=037693$ $x=037781$ $y=037783$
 $x=037811$ $y=037813$ $x=037991$ $y=037993$ $x=038237$ $y=038239$
 $x=038327$ $y=038329$ $x=038447$ $y=038449$ $x=038459$ $y=038461$
 $x=038567$ $y=038569$ $x=038609$ $y=038611$ $x=038651$ $y=038653$
 $x=038669$ $y=038671$ $x=038711$ $y=038713$ $x=038747$ $y=038749$
 $x=038921$ $y=038923$ $x=039041$ $y=039043$ $x=039161$ $y=039163$
 $x=039227$ $y=039229$ $x=039239$ $y=039241$ $x=039341$ $y=039343$
 $x=039371$ $y=039373$ $x=039509$ $y=039511$ $x=039827$ $y=039829$
 $x=039839$ $y=039841$ $x=040037$ $y=040039$ $x=040127$ $y=040129$
 $x=040151$ $y=040153$ $x=040427$ $y=040429$ $x=040529$ $y=040531$
 $x=040637$ $y=040639$ $x=040697$ $y=040699$ $x=040847$ $y=040849$
 $x=041141$ $y=041143$ $x=041177$ $y=041179$ $x=041201$ $y=041203$
 $x=041231$ $y=041233$ $x=041387$ $y=041389$ $x=041411$ $y=041413$
 $x=041519$ $y=041521$ $x=041609$ $y=041611$ $x=041759$ $y=041761$

x=041849 y=041851 x=041957 y=041959 x=041981 y=041983
x=042017 y=042019 x=042071 y=042073 x=042179 y=042181
x=042221 y=042223 x=042281 y=042283 x=042407 y=042409
x=042461 y=042463 x=042569 y=042571 x=042641 y=042643
x=042701 y=042703 x=042839 y=042841 x=042899 y=042901
x=043049 y=043051 x=043319 y=043321 x=043397 y=043399
x=043541 y=043543 x=043577 y=043579 x=043607 y=043609
x=043649 y=043651 x=043781 y=043783 x=043787 y=043789
x=043889 y=043891 x=043961 y=043963 x=044027 y=044029
x=044087 y=044089 x=044129 y=044131 x=044201 y=044203
x=044267 y=044269 x=044279 y=044281 x=044381 y=044383
x=044531 y=044533 x=044621 y=044623 x=044699 y=044701
x=044771 y=044773 x=045119 y=045121 x=045137 y=045139
x=045179 y=045181 x=045317 y=045319 x=045341 y=045343
x=045587 y=045589 x=045821 y=045823 x=046049 y=046051
x=046091 y=046093 x=046181 y=046183 x=046271 y=046273
x=046307 y=046309 x=046349 y=046351 x=046439 y=046441
x=046589 y=046591 x=046679 y=046681 x=046769 y=046771
x=046817 y=046819 x=046829 y=046831 x=047057 y=047059
x=047147 y=047149 x=047351 y=047353 x=047387 y=047389
x=047417 y=047419 x=047657 y=047659 x=047699 y=047701
x=047711 y=047713 x=047741 y=047743 x=047777 y=047779
x=047807 y=047809 x=048119 y=048121 x=048311 y=048313
x=048407 y=048409 x=048479 y=048481 x=048539 y=048541
x=048647 y=048649 x=048677 y=048679 x=048731 y=048733
x=048779 y=048781 x=048821 y=048823 x=048857 y=048859
x=048869 y=048871 x=048989 y=048991 x=049031 y=049033
x=049121 y=049123 x=049169 y=049171 x=049199 y=049201
x=049277 y=049279 x=049331 y=049333 x=049367 y=049369
x=049391 y=049393 x=049409 y=049411 x=049529 y=049531
x=049547 y=049549 x=049667 y=049669 x=049739 y=049741

x=049787 y=049789 x=049919 y=049921 x=049937 y=049939
x=049991 y=049993 x=050021 y=050023 x=050051 y=050053
x=050129 y=050131 x=050261 y=050263 x=050459 y=050461
x=050549 y=050551 x=050591 y=050593 x=050891 y=050893
x=050969 y=050971 x=051059 y=051061 x=051131 y=051133
x=051197 y=051199 x=051239 y=051241 x=051341 y=051343
x=051347 y=051349 x=051419 y=051421 x=051437 y=051439
x=051479 y=051481 x=051719 y=051721 x=051767 y=051769
x=051827 y=051829 x=051869 y=051871 x=051971 y=051973
x=052067 y=052069 x=052181 y=052183 x=052289 y=052291
x=052361 y=052363 x=052541 y=052543 x=052709 y=052711
x=052859 y=052861 x=052901 y=052903 x=053087 y=053089
x=053147 y=053149 x=053171 y=053173 x=053231 y=053233
x=053267 y=053269 x=053279 y=053281 x=053549 y=053551
x=053591 y=053593 x=053609 y=053611 x=053717 y=053719
x=053897 y=053899 x=054011 y=054013 x=054401 y=054403
x=054419 y=054421 x=054497 y=054499 x=054539 y=054541
x=054581 y=054583 x=054629 y=054631 x=054917 y=054919
x=055049 y=055051 x=055217 y=055219 x=055331 y=055333
x=055337 y=055339 x=055439 y=055441 x=055619 y=055621
x=055631 y=055633 x=055661 y=055663 x=055817 y=055819
x=055901 y=055903 x=055931 y=055933 x=056039 y=056041
x=056099 y=056101 x=056207 y=056209 x=056237 y=056239
x=056267 y=056269 x=056477 y=056479 x=056501 y=056503
x=056531 y=056533 x=056597 y=056599 x=056711 y=056713
x=056807 y=056809 x=056891 y=056893 x=056909 y=056911
x=056921 y=056923 x=057191 y=057193 x=057221 y=057223
x=057269 y=057271 x=057329 y=057331 x=057347 y=057349
x=057527 y=057529 x=057557 y=057559 x=057791 y=057793
x=057899 y=057901 x=058109 y=058111 x=058151 y=058153
x=058169 y=058171 x=058229 y=058231 x=058367 y=058369

x=058391 y=058393 x=058439 y=058441 x=058451 y=058453
x=058601 y=058603 x=058787 y=058789 x=058907 y=058909
x=059009 y=059011 x=059021 y=059023 x=059051 y=059053
x=059207 y=059209 x=059219 y=059221 x=059357 y=059359
x=059417 y=059419 x=059441 y=059443 x=059471 y=059473
x=059627 y=059629 x=059669 y=059671 x=060089 y=060091
x=060101 y=060103 x=060167 y=060169 x=060257 y=060259
x=060647 y=060649 x=060659 y=060661 x=060761 y=060763
x=060887 y=060889 x=060899 y=060901 x=060917 y=060919
x=061151 y=061153 x=061331 y=061333 x=061379 y=061381
x=061469 y=061471 x=061559 y=061561 x=061979 y=061981
x=062129 y=062131 x=062141 y=062143 x=062189 y=062191
x=062297 y=062299 x=062927 y=062929 x=062969 y=062971
x=062981 y=062983 x=062987 y=062989 x=063029 y=063031
x=063197 y=063199 x=063311 y=063313 x=063389 y=063391
x=063419 y=063421 x=063587 y=063589 x=063599 y=063601
x=063647 y=063649 x=063689 y=063691 x=063839 y=063841
x=064151 y=064153 x=064187 y=064189 x=064301 y=064303
x=064451 y=064453 x=064577 y=064579 x=064661 y=064663
x=064781 y=064783 x=064877 y=064879 x=064919 y=064921
x=065027 y=065029 x=065099 y=065101 x=065171 y=065173
x=065267 y=065269 x=065447 y=065449 x=065519 y=065521
x=065537 y=065539 x=065579 y=065581 x=065699 y=065701
x=065717 y=065719 x=065729 y=065731 x=065837 y=065839
x=065927 y=065929 x=065981 y=065983 x=066107 y=066109
x=066359 y=066361 x=066569 y=066571 x=066749 y=066751
x=066851 y=066853 x=066947 y=066949 x=067139 y=067141
x=067187 y=067189 x=067211 y=067213 x=067217 y=067219
x=067271 y=067273 x=067409 y=067411 x=067427 y=067429
x=067577 y=067579 x=067757 y=067759 x=067931 y=067933
x=068111 y=068113 x=068207 y=068209 x=068279 y=068281

x=068447 y=068449 x=068489 y=068491 x=068711 y=068713
x=068819 y=068821 x=068879 y=068881 x=068897 y=068899
x=069029 y=069031 x=069149 y=069151 x=069191 y=069193
x=069257 y=069259 x=069401 y=069403 x=069491 y=069493
x=069497 y=069499 x=069737 y=069739 x=069761 y=069763
x=069827 y=069829 x=069857 y=069859 x=069929 y=069931
x=070001 y=070003 x=070121 y=070123 x=070139 y=070141
x=070181 y=070183 x=070199 y=070201 x=070379 y=070381
x=070457 y=070459 x=070487 y=070489 x=070571 y=070573
x=070619 y=070621 x=070841 y=070843 x=070877 y=070879
x=070919 y=070921 x=070949 y=070951 x=070979 y=070981
x=070997 y=070999 x=071261 y=071263 x=071327 y=071329
x=071339 y=071341 x=071387 y=071389 x=071411 y=071413
x=071471 y=071473 x=071549 y=071551 x=071711 y=071713
x=071807 y=071809 x=071879 y=071881 x=072089 y=072091
x=072101 y=072103 x=072167 y=072169 x=072221 y=072223
x=072227 y=072229 x=072251 y=072253 x=072269 y=072271
x=072467 y=072469 x=072647 y=072649 x=072671 y=072673
x=072869 y=072871 x=073037 y=073039 x=073061 y=073063
x=073361 y=073363 x=073607 y=073609 x=073679 y=073681
x=073847 y=073849 x=074099 y=074101 x=074159 y=074161
x=074201 y=074203 x=074381 y=074383 x=074411 y=074413
x=074507 y=074509 x=074609 y=074611 x=074717 y=074719
x=074729 y=074731 x=074759 y=074761 x=075011 y=075013
x=075167 y=075169 x=075209 y=075211 x=075389 y=075391
x=075401 y=075403 x=075539 y=075541 x=075617 y=075619
x=075707 y=075709 x=075989 y=075991 x=076001 y=076003
x=076079 y=076081 x=076157 y=076159 x=076259 y=076261
x=076367 y=076369 x=076421 y=076423 x=076541 y=076543
x=076649 y=076651 x=076829 y=076831 x=076871 y=076873
x=076961 y=076963 x=077237 y=077239 x=077261 y=077263

x=077267 y=077269 x=077417 y=077419 x=077477 y=077479
x=077489 y=077491 x=077549 y=077551 x=077687 y=077689
x=077711 y=077713 x=078137 y=078139 x=078191 y=078193
x=078437 y=078439 x=078509 y=078511 x=078539 y=078541
x=078569 y=078571 x=078779 y=078781 x=078887 y=078889
x=078977 y=078979 x=079151 y=079153 x=079229 y=079231
x=079397 y=079399 x=079559 y=079561 x=079631 y=079633
x=079691 y=079693 x=079697 y=079699 x=079811 y=079813
x=079841 y=079843 x=079901 y=079903 x=079997 y=079999
x=080147 y=080149 x=080207 y=080209 x=080231 y=080233
x=080447 y=080449 x=080471 y=080473 x=080489 y=080491
x=080627 y=080629 x=080669 y=080671 x=080681 y=080683
x=080747 y=080749 x=080777 y=080779 x=080831 y=080833
x=080909 y=080911 x=081017 y=081019 x=081041 y=081043
x=081047 y=081049 x=081197 y=081199 x=081281 y=081283
x=081371 y=081373 x=081551 y=081553 x=081647 y=081649
x=081701 y=081703 x=081899 y=081901 x=081929 y=081931
x=081971 y=081973 x=082007 y=082009 x=082037 y=082039
x=082139 y=082141 x=082217 y=082219 x=082349 y=082351
x=082469 y=082471 x=082529 y=082531 x=082559 y=082561
x=082721 y=082723 x=082727 y=082729 x=082757 y=082759
x=082811 y=082813 x=082889 y=082891 x=083219 y=083221
x=083231 y=083233 x=083267 y=083269 x=083339 y=083341
x=083399 y=083401 x=083561 y=083563 x=083639 y=083641
x=083717 y=083719 x=084059 y=084061 x=084179 y=084181
x=084221 y=084223 x=084317 y=084319 x=084347 y=084349
x=084389 y=084391 x=084521 y=084523 x=084629 y=084631
x=084809 y=084811 x=084857 y=084859 x=084869 y=084871
x=084977 y=084979 x=085091 y=085093 x=085199 y=085201
x=085331 y=085333 x=085361 y=085363 x=085427 y=085429
x=085451 y=085453 x=085619 y=085621 x=085667 y=085669

x=085817 y=085819 x=085829 y=085831 x=085931 y=085933
x=086027 y=086029 x=086111 y=086113 x=086291 y=086293
x=086351 y=086353 x=086369 y=086371 x=086531 y=086533
x=086627 y=086629 x=086927 y=086929 x=087011 y=087013
x=087119 y=087121 x=087149 y=087151 x=087179 y=087181
x=087221 y=087223 x=087251 y=087253 x=087509 y=087511
x=087539 y=087541 x=087557 y=087559 x=087587 y=087589
x=087629 y=087631 x=087641 y=087643 x=087719 y=087721
x=087959 y=087961 x=088001 y=088003 x=088259 y=088261
x=088337 y=088339 x=088469 y=088471 x=088589 y=088591
x=088607 y=088609 x=088661 y=088663 x=088799 y=088801
x=088811 y=088813 x=088817 y=088819 x=089069 y=089071
x=089519 y=089521 x=089561 y=089563 x=089597 y=089599
x=089657 y=089659 x=089669 y=089671 x=089819 y=089821
x=089897 y=089899 x=090017 y=090019 x=090071 y=090073
x=090197 y=090199 x=090371 y=090373 x=090401 y=090403
x=090437 y=090439 x=090527 y=090529 x=090617 y=090619
x=090677 y=090679 x=090821 y=090823 x=091079 y=091081
x=091097 y=091099 x=091127 y=091129 x=091139 y=091141
x=091151 y=091153 x=091367 y=091369 x=091457 y=091459
x=091571 y=091573 x=091811 y=091813 x=091967 y=091969
x=092177 y=092179 x=092219 y=092221 x=092381 y=092383
x=092399 y=092401 x=092459 y=092461 x=092567 y=092569
x=092639 y=092641 x=092669 y=092671 x=092681 y=092683
x=092789 y=092791 x=092861 y=092863 x=092957 y=092959
x=093131 y=093133 x=093239 y=093241 x=093251 y=093253
x=093281 y=093283 x=093479 y=093481 x=093491 y=093493
x=093557 y=093559 x=093701 y=093703 x=093761 y=093763
x=093809 y=093811 x=093887 y=093889 x=093911 y=093913
x=094007 y=094009 x=094109 y=094111 x=094151 y=094153
x=094307 y=094309 x=094349 y=094351 x=094397 y=094399

x=094439 y=094441 x=094529 y=094531 x=094541 y=094543
x=094559 y=094561 x=094649 y=094651 x=094847 y=094849
x=094949 y=094951 x=095087 y=095089 x=095189 y=095191
x=095231 y=095233 x=095441 y=095443 x=095789 y=095791
x=095801 y=095803 x=095957 y=095959 x=095987 y=095989
x=096179 y=096181 x=096221 y=096223 x=096329 y=096331
x=096587 y=096589 x=096737 y=096739 x=096797 y=096799
x=096821 y=096823 x=097001 y=097003 x=097157 y=097159
x=097169 y=097171 x=097301 y=097303 x=097367 y=097369
x=097379 y=097381 x=097499 y=097501 x=097547 y=097549
x=097577 y=097579 x=097607 y=097609 x=097649 y=097651
x=097787 y=097789 x=097841 y=097843 x=097847 y=097849
x=097859 y=097861 x=098009 y=098011 x=098297 y=098299
x=098321 y=098323 x=098387 y=098389 x=098561 y=098563
x=098639 y=098641 x=098711 y=098713 x=098729 y=098731
x=098807 y=098809 x=098867 y=098869 x=098897 y=098899
x=098909 y=098911 x=098927 y=098929 x=099131 y=099133
x=099137 y=099139 x=099257 y=099259 x=099347 y=099349
x=099527 y=099529 x=099707 y=099709 x=099719 y=099721
x=099989 y=099991

第七章 双孪生素数

中间间隔一个奇合数的相邻两对孪生素数构成一组“双孪生素数”。“双孪生素数”是否有无穷多组？尚未得证明，下面就此问题予以讨论。

7.1 求解证明

设 A 为大于 60000 的任意正整数，将不超过 A 的全部正整数集合用 E 表示，则 E 的基数 $|E|$ 为： $|E| = A$

以埃氏筛法求得不超过 $A^{1/2}$ 的全部素数集合 P ，且将集合 P 中元素按数值大小顺序排列如下：

$$P = (p_1, p_2, \dots, p_r)$$

$$2 = p_1 < p_2 < \dots < p_r \leq A^{1/2} \quad (1)$$

命集合 $N = (p_r + 1, p_r + 2, \dots, A)$ ，则 N 的基数

$$|N| = n = A - p_r \quad (2)$$

用筛选方法从集合 N 中分选出必要的子集。

给定以下四个筛选条件：

$$g \neq 0 \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (3)$$

$$g \neq 2 \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (4)$$

$$g \neq 6 \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (5)$$

$$g \neq 8 \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (6)$$

g 表示集合 N 中被选元素。

从集合 N 中将同时符合 (3)，(4)，(5)，(6) 式条件所有元素分选出来，组成子集 N_B ，再来讨论子集 N_B 的基数 $|N_B|$ （筛函数）。

7.1.1 求证筛函数的下界

集合 N 为自然数列集合, 模数集合 P 中的元素为互不相同的素数。根据第一章的相关公式 (61) 式可知, 基数 $|N_B|$ 的近似估算公式为

$$|N_B| = n \prod_{i=1}^r \left(\frac{\alpha_i}{p_i} \right) \quad (7)$$

根据第一章的 (72) 式可知, 基数 $|N_B|$ 的下界计算公式为

$$|N_B| > n \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{p_i}{n} \right) \left(\frac{\alpha_i}{p_i} \right) \quad (8)$$

式中 α_i 为按照筛选条件所选取模 p_i 的同余类子集的个数。

下面具体确定 α_i 的数值。

当 $i=1$ 时, $p_1=2$

显然, 2, 6, 8 皆可被 2 整除, 故知此时 (3), (4), (5), (6) 式合并为一个条件:

$$g \not\equiv 0 \pmod{p_1} \quad (9)$$

依据 (9) 式可知, 集合 N 中只有模 p_1 的 “1 同余类子集” 一个符合筛选条件, 故得

$$\alpha_1 = 1 \quad (10)$$

当 $i=2$ 时, $p_2=3$, 由于

$$6 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$8 \equiv 2 \pmod{3}$$

所以, 筛选条件 (3), (4), (5), (6) 合并为两个条件:

$$g \not\equiv 0 \pmod{p_2} \quad (11)$$

$$g \not\equiv 2 \pmod{p_2} \quad (12)$$

依据 (11) 式和 (12) 式可知, 集合 N 中只有模 p_2 的 “1

同余类子集”符合筛选条件，故得

$$\alpha_2 = 1 \quad (13)$$

当 $i > 2$ 时，筛选条件 (3) (4) (5) (6) 对应于四个不同的同余类子集。由此可知，此时只有模 p_i 的“0 同余类子集”“2 同余类子集”“与 6 同余类子集”和“与 8 同余类子集”这四个同余类子集之外的其余同余类子集才能符合筛选条件，故得：

$$\alpha_i = p_i - 4, \quad i > 2 \quad (14)$$

将 (10), (13), 和 (14) 代入 (7) 式得

$$|N_B| = n \left(\frac{1}{6}\right) \prod_{i=3}^r \left(\frac{p_i - 4}{p_i}\right) \quad (15)$$

将 (10) (13) 和 (14) 代入 (8) 式得

$$|N_B| > F_1 \left\{\frac{n}{6}\right\} \prod_{i=3}^r \left(\frac{p_i - 4}{p_i}\right) \quad (16)$$

$$F_1 = \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{p_i}{n}\right) > 1 - \left(\frac{1}{n}\right) \sum_{i=1}^r p_i \quad (17)$$

由第一章 (77) 式可以推得

$$\Pi(x) - \Pi\left(\frac{x}{2}\right) < \Pi\left(\frac{x}{2}\right) \quad (18)$$

(18) 式表明，数值越大的区域素数分布的密度越小，故得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r p_i &= 17 + \sum_{i=5}^r p_i < 17 + \left(\frac{1}{2}\right)(p_5 + p_r) \{\Pi(p_r) - 4\} = \\ &17 + \frac{(p_5 + p_r)}{2} \Pi(p_r) - 2(p_5 + p_r) \end{aligned} \quad (19)$$

根据第一章 (82) 式可知

$$\Pi(p_r) < (6 \ln 2) \left(\frac{p_r}{\ln p_r}\right) \quad (20)$$

(20) 式代入 (19) 式可得

$$\sum_{i=1}^r p_i < 17 - 2(p_5 + p_r) + \frac{(6 \ln 2)(p_5 + p_r)p_r}{2 \ln p_r} \quad (21)$$

将 (21) 式代入 (17) 式可得

$$F_1 > 1 + \left\{ \frac{2(p_5 + p_r)}{n} \right\} - \left(\frac{17}{n} \right) - \left\{ \frac{2.08(p_5 + p_r)p_r}{n \ln p_r} \right\} \quad (22)$$

将 (22) 式代入 (16) 式可得

$$\begin{aligned} |N_B| &> \left\{ \frac{n}{6} + \frac{(p_5 + p_r)}{3} \right\} \prod_{i=3}^r \left(\frac{p_i - 4}{p_i} \right) - \\ &\left\{ \frac{17}{6} + \frac{2.08(p_5 + p_r)p_r}{6 \ln p_r} \right\} \prod_{i=3}^r \left(\frac{p_i - 4}{p_i} \right) \end{aligned} \quad (23)$$

$$\text{令 } F_2 = \frac{n}{6} + \frac{p_5 + p_r}{3} \quad (24)$$

$$F_3 = \frac{17}{6} + \frac{2.08(p_5 + p_r)p_r}{6 \ln p_r} \quad (25)$$

将 (24) 式和 (25) 式代入 (23) 式得

$$|N_B| > F_2 \prod_{i=3}^r \left(\frac{p_i - 4}{p_i} \right) - F_3 \prod_{i=3}^r \left(\frac{p_i - 4}{p_i} \right) \quad (26)$$

将 F_2 作以下变换

$$F_2 = F_2 \left(\frac{p_7}{p_9 - 4} \right) + F_2 \left(\frac{2}{p_9 - 4} \right) \quad (27)$$

$$F_2 = F_2 \left(\frac{p_8}{p_{10} - 4} \right) + F_2 \left(\frac{6}{p_{10} - 4} \right) \quad (28)$$

$$F_2 = F_2 \left(\frac{p_9}{p_{11} - 4} \right) + F_2 \left(\frac{4}{p_{11} - 4} \right) \quad (29)$$

$$F_2 = F_2 \left(\frac{p_{10}}{p_{12} - 4} \right) + F_2 \left(\frac{4}{p_{12} - 4} \right) \quad (30)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{11}}{p_{13}-4}\right) + F_2\left(\frac{6}{p_{13}-4}\right) \quad (31)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{12}}{p_{14}-4}\right) + F_2\left(\frac{2}{p_{14}-4}\right) \quad (32)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{13}}{p_{15}-4}\right) + F_2\left(\frac{2}{p_{15}-4}\right) \quad (33)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{14}}{p_{16}-4}\right) + F_2\left(\frac{6}{p_{16}-4}\right) \quad (34)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{15}}{p_{17}-4}\right) + F_2\left(\frac{8}{p_{17}-4}\right) \quad (35)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{16}}{p_{18}-4}\right) + F_2\left(\frac{4}{p_{18}-4}\right) \quad (36)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{17}}{p_{19}-4}\right) + F_2\left(\frac{4}{p_{19}-4}\right) \quad (37)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{18}}{p_{20}-4}\right) + F_2\left(\frac{6}{p_{20}-4}\right) \quad (38)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{19}}{p_{21}-4}\right) + F_2\left(\frac{2}{p_{21}-4}\right) \quad (39)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{20}}{p_{22}-4}\right) + F_2\left(\frac{4}{p_{22}-4}\right) \quad (40)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{21}}{p_{23}-4}\right) + F_2\left(\frac{6}{p_{23}-4}\right) \quad (41)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{22}}{p_{24}-4}\right) + F_2\left(\frac{6}{p_{24}-4}\right) \quad (42)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{23}}{p_{25}-4}\right) + F_2\left(\frac{10}{p_{25}-4}\right) \quad (43)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{24}}{p_{26}-4}\right) + F_2\left(\frac{8}{p_{26}-4}\right) \quad (44)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{25}}{p_{27}-4}\right) + F_2\left(\frac{2}{p_{27}-4}\right) \quad (45)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{26}}{p_{28}-4}\right) + F_2\left(\frac{2}{p_{28}-4}\right) \quad (46)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{27}}{p_{29}-4}\right) + F_2\left(\frac{2}{p_{29}-4}\right) \quad (47)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{28}}{p_{30}-4}\right) + F_2\left(\frac{2}{p_{30}-4}\right) \quad (48)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{29}}{p_{31}-4}\right) + F_2\left(\frac{14}{p_{31}-4}\right) \quad (49)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{30}}{p_{32}-4}\right) + F_2\left(\frac{14}{p_{32}-4}\right) \quad (50)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{31}}{p_{33}-4}\right) + F_2\left(\frac{6}{p_{33}-4}\right) \quad (51)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{32}}{p_{34}-4}\right) + F_2\left(\frac{4}{p_{34}-4}\right) \quad (52)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{33}}{p_{35}-4}\right) + F_2\left(\frac{8}{p_{35}-4}\right) \quad (53)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{34}}{p_{36}-4}\right) + F_2\left(\frac{8}{p_{36}-4}\right) \quad (54)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{35}}{p_{37}-4}\right) + F_2\left(\frac{4}{p_{37}-4}\right) \quad (55)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{36}}{p_{38}-4}\right) + F_2\left(\frac{8}{p_{38}-4}\right) \quad (56)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{37}}{p_{39}-4}\right) + F_2\left(\frac{6}{p_{39}-4}\right) \quad (57)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{38}}{p_{40}-4}\right) + F_2\left(\frac{6}{p_{40}-4}\right) \quad (58)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{P_{39}}{p_{41}-4}\right) + F_2\left(\frac{8}{p_{41}-4}\right) \quad (59)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{P_{40}}{p_{42}-4}\right) + F_2\left(\frac{4}{p_{42}-4}\right) \quad (60)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{P_{41}}{p_{43}-4}\right) + F_2\left(\frac{8}{p_{43}-4}\right) \quad (61)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{P_{42}}{p_{44}-4}\right) + F_2\left(\frac{8}{p_{44}-4}\right) \quad (62)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{P_{43}}{p_{45}-4}\right) + F_2\left(\frac{2}{p_{45}-4}\right) \quad (63)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{P_{44}}{p_{46}-4}\right) + F_2\left(\frac{2}{p_{46}-4}\right) \quad (64)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{P_{45}}{p_{47}-4}\right) + F_2\left(\frac{10}{p_{47}-4}\right) \quad (65)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{P_{46}}{p_{48}-4}\right) + F_2\left(\frac{20}{p_{48}-4}\right) \quad (66)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{P_{47}}{p_{49}-4}\right) + F_2\left(\frac{12}{p_{49}-4}\right) \quad (67)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{P_{48}}{p_{50}-4}\right) + F_2\left(\frac{2}{p_{50}-4}\right) \quad (68)$$

将 (27) ~ (68) 逐次代入前一项, 可得:

$$F_2 = F_2 \prod_{j=9}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + F_4 \quad (69)$$

式中:

$$F_4 = \left(\frac{2F_2}{p_9-4}\right) \prod_{j=10}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \left(\frac{6F_2}{p_{10}-4}\right) \prod_{j=11}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) +$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{4F_2}{p_{11}-4}\right)\prod_{j=12}^{50}\left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \left(\frac{4F_2}{p_{12}-4}\right)\prod_{j=13}^{50}\left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \\
& \left(\frac{6F_2}{p_{13}-4}\right)\prod_{j=14}^{50}\left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \left(\frac{2F_2}{p_{14}-4}\right)\prod_{j=15}^{50}\left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \\
& \left(\frac{2F_2}{p_{15}-4}\right)\prod_{j=16}^{50}\left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \left(\frac{6F_2}{p_{16}-4}\right)\prod_{j=17}^{50}\left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \\
& \left(\frac{8F_2}{p_{17}-4}\right)\prod_{j=18}^{50}\left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \left(\frac{4F_2}{p_{18}-4}\right)\prod_{j=19}^{50}\left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \\
& \left(\frac{4F_2}{p_{19}-4}\right)\prod_{j=20}^{50}\left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \left(\frac{6F_2}{p_{20}-4}\right)\prod_{j=21}^{50}\left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \\
& \left(\frac{2F_2}{p_{21}-4}\right)\prod_{j=22}^{50}\left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \left(\frac{4F_2}{p_{22}-4}\right)\prod_{j=23}^{50}\left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \\
& \left(\frac{6F_2}{p_{23}-4}\right)\prod_{j=24}^{50}\left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \left(\frac{6F_2}{p_{24}-4}\right)\prod_{j=25}^{50}\left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \\
& \left(\frac{10F_2}{p_{25}-4}\right)\prod_{j=26}^{50}\left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \left(\frac{8F_2}{p_{26}-4}\right)\prod_{j=27}^{50}\left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \\
& \left(\frac{2F_2}{p_{27}-4}\right)\prod_{j=28}^{50}\left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \left(\frac{2F_2}{p_{28}-4}\right)\prod_{j=29}^{50}\left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \\
& \left(\frac{2F_2}{p_{29}-4}\right)\prod_{j=30}^{50}\left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \left(\frac{2F_2}{p_{30}-4}\right)\prod_{j=31}^{50}\left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \\
& \left(\frac{14F_2}{p_{31}-4}\right)\prod_{j=32}^{50}\left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \left(\frac{14F_2}{p_{32}-4}\right)\prod_{j=33}^{50}\left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \\
& \left(\frac{6F_2}{p_{33}-4}\right)\prod_{j=34}^{50}\left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \left(\frac{4F_2}{p_{34}-4}\right)\prod_{j=35}^{50}\left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{8F_2}{p_{35}-4}\right)\prod_{j=36}^{50}\left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \left(\frac{8F_2}{p_{36}-4}\right)\prod_{j=37}^{50}\left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \\
& \left(\frac{4F_2}{p_{37}-4}\right)\prod_{j=38}^{50}\left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \left(\frac{8F_2}{p_{38}-4}\right)\prod_{j=39}^{50}\left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \\
& \left(\frac{6F_2}{p_{39}-4}\right)\prod_{j=40}^{50}\left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \left(\frac{6F_2}{p_{40}-4}\right)\prod_{j=41}^{50}\left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \\
& \left(\frac{8F_2}{p_{41}-4}\right)\prod_{j=42}^{50}\left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \left(\frac{4F_2}{p_{42}-4}\right)\prod_{j=43}^{50}\left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \\
& \left(\frac{8F_2}{p_{43}-4}\right)\prod_{j=44}^{50}\left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \left(\frac{8F_2}{p_{44}-4}\right)\prod_{j=45}^{50}\left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \\
& \left(\frac{2F_2}{p_{45}-4}\right)\prod_{j=46}^{50}\left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \left(\frac{2F_2}{p_{46}-4}\right)\prod_{j=47}^{50}\left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \\
& \left(\frac{10F_2}{p_{47}-4}\right)\prod_{j=48}^{50}\left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \left(\frac{20F_2}{p_{48}-4}\right)\prod_{j=49}^{50}\left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \\
& \left(\frac{12F_2}{p_{49}-4}\right)\left(\frac{p_{48}}{p_{50}-4}\right) + \left(\frac{2F_2}{p_{50}-4}\right) \quad (70)
\end{aligned}$$

将 $p_8=19$, $p_9=23$, $p_{10}=29$, $p_{11}=31$, $p_{12}=37$, $p_{13}=41$,
 $p_{14}=43$, $p_{15}=47$, $p_{16}=53$, $p_{17}=59$, $p_{18}=61$, $p_{19}=67$,
 $p_{20}=71$, $p_{21}=73$, $p_{22}=79$, $p_{23}=83$, $p_{24}=89$, $p_{25}=97$,
 $p_{26}=101$, $p_{27}=103$, $p_{28}=107$, $p_{29}=109$, $p_{30}=113$,
 $p_{31}=127$, $p_{32}=131$, $p_{33}=137$, $p_{34}=139$, $p_{35}=149$,
 $p_{36}=151$, $p_{37}=157$, $p_{38}=163$, $p_{39}=167$, $p_{40}=173$,
 $p_{41}=179$, $p_{42}=181$, $p_{43}=191$, $p_{44}=193$, $p_{45}=197$,
 $p_{46}=199$, $p_{47}=211$, $p_{48}=223$, $p_{49}=227$, $p_{50}=229$ 代入

(70) 式可得

$$F_4 = 0.9477F_2 \quad (71)$$

将 (71) 式代入 (69) 式得

$$F_2 = F_2 \prod_{j=9}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j - 4} \right) + 0.9477F_2 \quad (72)$$

将 (72) 式代入 (26) 式得

$$|N_B| > F_2 \prod_{j=9}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j - 4} \right) \prod_{i=3}^r \left(\frac{p_i - 4}{p_i} \right) + F_5 \quad (73)$$

$$F_5 = (0.9477F_2 - F_3) \prod_{i=3}^r \left(\frac{p_i - 4}{p_i} \right) \quad (74)$$

$$\text{令 } F_6 = 0.9477F_2 - F_3 \quad (75)$$

将 (75) 式代入 (74) 式得

$$F_5 = F_6 \prod_{i=3}^r \left(\frac{p_i - 4}{p_i} \right) \quad (76)$$

将 (24) 式, (25) 式代入 (75) 式可得

$$\begin{aligned} F_6 &= \frac{0.9477n}{6} + \frac{0.9477(p_5 + p_r)}{3} - \frac{17}{6} - \frac{2.08(p_5 + p_r)p_r}{6 \ln p_r} = \\ &0.641 + 0.1579(n + 2p_r) - \frac{2.08(p_5 + p_r)p_r}{6 \ln p_r} \end{aligned} \quad (77)$$

将 (1) 式和 (2) 式代入 (77) 式得

$$\begin{aligned} F_6 &\geq 0.641 + \{0.1579(p_r + 1) - \frac{2.08(p_5 + p_r)}{6 \ln p_r}\} p_r = \\ &0.641 + F_7 p_r \end{aligned} \quad (78)$$

$$F_7 = 0.1579(p_r + 1) - \frac{2.08(p_5 + p_r)}{6 \ln p_r} \quad (79)$$

$$\begin{aligned}\frac{dF_7}{dp_r} &= 0.1579 - \left(\frac{2.08}{6}\right) \left\{ \frac{\ln p_r - (p_5 + p_r)(1/p_r)}{\ln^2 p_r} \right\} = \\ &0.1579 - \frac{2.08}{6 \ln p_r} + \frac{2.08(p_5 + p_r)}{6 p_r \ln^2 p_r} > 0.1579 - \frac{2.08}{6 \ln p_r} \quad (80)\end{aligned}$$

$$\text{令} \quad 0.1579 - \frac{2.08}{6 \ln p_r} > 0$$

$$\text{得:} \quad p_r > 9 \quad (81)$$

将条件(81)式代入(80)式得

$$\frac{dF_7}{dp_r} > 0 \quad (p_r > 9) \quad (82)$$

由(82)式知, 当 $p_r > 9$ 时, F_7 为 p_r 的增值函数。

$$\text{当 } A \geq 60000 \text{ 时,} \quad p_r \geq 241 > 9$$

$$\text{且 } F_7(p_r = 241) = 22.8$$

$$\text{故知} \quad F_7 > 22 \quad (A \geq 60000) \quad (83)$$

将(83)代入(78)式得

$$F_6 > 0.641 + 22p_r \quad (84)$$

(84)式代入(76)式得:

$$\begin{aligned}F_5 &> (0.641 + 22p_r) \prod_{i=3}^r \left(\frac{p_i - 4}{p_i} \right) = \\ &(0.641 + 22p_r) \left(\frac{1}{5} \right) \prod_{i=4}^r \left(\frac{p_i - 4}{p_i} \right) \quad (85)\end{aligned}$$

$$\text{已知} \quad p_i - 4 \geq p_{i-2} \quad (i \geq 4) \quad (86)$$

由(86)式, (85)式可得

$$F_5 > (0.641 + 22p_r) \left(\frac{1}{5} \right) \prod_{i=4}^r \left(\frac{p_{i-2}}{p_i} \right) =$$

$$(0.641 + 22p_r) \left(\frac{3}{p_{r-1}p_r} \right) > 0 \quad (87)$$

将 (24) 式和 (87) 式代入 (73) 式得

$$|N_B| > \left(\frac{n}{6} + \frac{p_5 + p_r}{3} \right) \prod_{j=9}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j - 4} \right) \prod_{i=3}^r \left(\frac{p_i - 4}{p_i} \right) \quad (88)$$

将 (86) 式代入 (88) 式得

$$\begin{aligned} |N_B| &> \left(\frac{n}{6} + \frac{p_5 + p_r}{3} \right) \prod_{j=3}^8 \left(\frac{p_j - 4}{p_j} \right) \prod_{i=9}^r \left(\frac{p_i - 2}{p_i} \right) = \\ &= \left(\frac{n}{6} + \frac{p_5 + p_r}{3} \right) \left(\frac{189}{5005} \right) \left(\frac{195}{p_7 p_8} \right) \left\{ \frac{p_7 p_8}{p_{r-1} p_r} \right\} = \\ &= \left(\frac{n}{6} + \frac{11 + p_r}{3} \right) \left(\frac{7.36}{p_{r-1} p_r} \right) \end{aligned} \quad (89)$$

将 (1) 式和 (2) 式代入 (89) 式得

$$|N_B| > \left(\frac{p_r^2}{6} + \frac{p_r}{6} + \frac{11}{3} \right) \left(\frac{7.36}{p_{r-1} p_r} \right) \quad (90)$$

已知 $p_r \geq p_{r-1} + 2$, 故由 (90) 式可得

$$\begin{aligned} |N_B| &> \left\{ \frac{p_r(p_{r-1} + 2)}{6} + \frac{p_r}{6} + \frac{11}{3} \right\} \left\{ \frac{7.36}{p_{r-1} p_r} \right\} = \\ &= 1.226 + \frac{3.68}{p_{r-1}} + \frac{27}{p_{r-1} p_r} > 1.226 \end{aligned} \quad (91)$$

7.1.2 通过子集 N_B 求解

我们从集合 N_B 中任取一个元素 l_1 , 再引入参量:

$$l_2 = l_1 - 2 \quad (92)$$

$$l_3 = l_1 - 6 \quad (93)$$

$$l_4 = l_1 - 8 \quad (94)$$

显然, $l_1 \in E$, $l_1 > 1$ (95)

以集合 P 中各元素为模数, 求得同余式组:

$$l_1 \equiv l_{1i} \pmod{p_i}, \quad i=1,2,\dots,r$$

$$l_2 \equiv l_{2i} \pmod{p_i}, \quad i=1,2,\dots,r$$

$$l_3 \equiv l_{3i} \pmod{p_i}, \quad i=1,2,\dots,r$$

$$l_4 \equiv l_{4i} \pmod{p_i}, \quad i=1,2,\dots,r$$

由于 $l_1 \in N_B$, 由筛选条件 (3), (4), (5), (6) 式可知,

$$l_{1i} \neq 0, \quad i=1,2,\dots,r \quad (96)$$

$$l_{1i} \neq 2, \quad i=1,2,\dots,r \quad (97)$$

$$l_{1i} \not\equiv 6 \pmod{p_i}, \quad i=1,2,\dots,r \quad (98)$$

$$l_{1i} \not\equiv 8 \pmod{p_i}, \quad i=1,2,\dots,r \quad (99)$$

由前述定义可知,

$$l_2 \in E, \quad l_2 > 1 \quad (100)$$

$$l_3 \in E, \quad l_3 > 1 \quad (101)$$

$$l_4 \in E, \quad l_4 > 1 \quad (102)$$

依据同余式的性质, 由 (92) 式, (93) 式, (94) 式可推得

$$l_{2i} \equiv l_{1i} - 2 \pmod{p_i}, \quad i=1,2,\dots,r \quad (103)$$

$$l_{3i} \equiv l_{1i} - 6 \pmod{p_i}, \quad i=1,2,\dots,r \quad (104)$$

$$l_{4i} \equiv l_{1i} - 8 \pmod{p_i}, \quad i=1,2,\dots,r \quad (105)$$

由 (97) 式和 (103) 式可知

$$l_{2i} \neq 0, \quad i=1,2,\dots,r \quad (106)$$

由 (98) 式和 (104) 式可知

$$l_{3i} \neq 0, \quad i=1,2,\dots,r \quad (107)$$

由 (99) 式和 (105) 式可知

$$l_{4i} \neq 0, \quad i=1,2,\dots,r \quad (108)$$

依据第一章引理 3, 由 (95) 式, (96) 式可知: l_1 为奇素数。

依据第一章引理 3, 由 (100) 式, (106) 式可知: l_2 为奇素数。

依据第一章引理 3, 由 (101) 式, (107) 式可知: l_3 为奇素数。

依据第一章引理 3, 由 (102) 式, (108) 式可知: l_4 为奇素数。

由 (92) 式, (93) 式和 (94) 式可知

$$l_1 - l_2 = 2, \quad l_2 - l_3 = 4, \quad l_3 - l_4 = 2 \quad (109)$$

故知, (l_1, l_2, l_3, l_4) 构成双孪生素数。

(注: $l_1, l_2, l_2 - 2, l_3, l_4$ 这五个数构成公差 $\Delta = 2$ 的正整数等差级数。若以素数 3 为模数, 则模数 3 与公差 2 互素。根据正整数等差级数的基本特征可知, 上述五个元素中任意相邻的三个元素都构成模 3 的完全剩余组。即任意相邻的三个元素中必定有一个能被 3 整除。由于 l_1, l_2, l_3, l_4 都是素数, 都不能被 3 整除, 所以, 只有 $l_2 - 2$ 能被 3 整除, 故 $l_2 - 2$ 为复合数)。

由 (96) 式, (106) 式, (107) 式和 (108) 式可知 l_1, l_2, l_3 和 l_4 四个素数都不属于集合 P 。所以, 其中最小的素数 l_4 亦满足下列不等式:

$$l_4 > p_r \quad (110)$$

根据定义, p_r 是不超过 $A^{1/2}$ 的最大素数, 故大于 p_r 的素数必定大于 $A^{1/2}$ 。即有:

$$l_4 > A^{1/2} \quad (111)$$

由 (95) 式可知, l_1, l_2, l_3, l_4 四个素数中最大的素数 l_1 应满足下述不等式

$$l_1 \leq A \quad (112)$$

由 (91) 式, (111) 式和 (112) 式可知, 在区间 $(A, A^{1/2})$ 内至少有 2 组双孪生素数, 再考虑到上述推证过程中用到的 (83)

式的限制条件，则可得一条定律如下。

双孪生素数定律：对于不小于 60000 的任意正整数 A 而言，在区间 $(A, A^{1/2})$ 内，至少有两组双孪生素数。

7.2 双孪生素数的无限性

根据“双孪生素数定律”可知在区间 $(A^{1/2}, A)$ ($A > 60000$) 内至少有两组双孪生素数，同理，在区间 (A, A^2) 内，在区间 (A^2, A^4) 内，……都至少有两组双孪生素数。当 A 的指数趋向无穷时，双孪生素数自然有无穷多组。

7.3 求解程序

下面是用 ASP 写的求解程序，包括输入界面和运算显示两个文件：

第一个文件 (input.asp)：

```
<html>
<head>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset
=gb2312">
<LINK href="/style.css" type=text/css rel=stylesheet>
<title>双孪生素数</title>
<script language="JavaScript" >
function suborno() (
    var a=form1.a.value;
    if(a=="'||a==null) (
        alert("请输入一个数字 (13 以上)! ");
        return;
    ) else if(parseInt(a)<13) (
```

```

        alert("输入的数字必须大于 13! ");
        return;
    ) form1.submit();
)
</script>

</head>

<body bgcolor="#BFC0B6">
    <p align="center"><font color="#FF0000" size="4"><strong>
双孪生素数求解程序</strong></font></p>
    <p align="center">&nbsp;&nbsp;&nbsp;</p>
    <p align="center">&nbsp;&nbsp;&nbsp;</p>
    <p align="center">如果您输入的数较大，计算时间将会较
长，请耐心等待！</p>
    <form name="form1" method="post" action="sievejs.asp">
        <table width="500" border="0" align="center"
cellpadding="5" cellspacing="0">
            <tr>
                <td width="161" align="right">请输入一个数字（13 以上）：
</td>
                <td width="319"><input name="a" type="text" id="a"></td>
            </tr>
            <tr>
                <td align="center" colspan="2"><input type="button" name=
"Submit1" value="提交" onClick="javascript:suborno();">
&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&~
                <input type="reset" name="Submit2" value="重置"></td>
            </tr>
        </table>

```

```

</form>
<p align="center">&nbsp;&nbsp;&nbsp;</p>
</body>
</html>

```

第二个文件 (sievejs.asp):

```

<%a=clng(request.form("a"))
%>
<html>
<head>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=
gb2312">
<LINK href="/.style.css" type=text/css rel=stylesheet>
<title>双孪生素数</title>
</head>
<body bgcolor="#BFC0B6"><br>&nbsp;&nbsp;&nbsp;<br>&nbsp;&nbsp;&nbsp;<br>&nbsp;&nbsp;&nbsp;
<div align="center" id="wait_div"><font color="#FF0000"
size="4"><strong>如果出现提示 “.....是否取消该脚本？”，请点
击 “否”，请耐心等待！</strong></font></div>
<div align="center" id="wait2_div" style="display:none"><font color="
#FF0000" size="5"><strong>双孪生素数求解运算结果</strong></font>
</div>
<p><script language="JavaScript">
var a,i,pi,j,flag,ni,n,m,x,y,k,pr,ther,num1,num2,num3;
//var array_ni = new Array();
var array_pi = new Array();
//var array_pi2 = new Array();
var array_a = new Array();

```

```
//var array_ai = new Array();
var array_hi = new Array();
//var array_pi_ni = new Array()
//a=clng(request.form("a"))
num1=0;
num2=0;
num3=0;
a=parseInt("<%=a%>");
if (a<10)
(
    document.write("输入错误! ");
) else (
    document.write("<font color=#FF0000 size='4'>输入的数 a
为: </font><font color=#8000FF size=4>"+a+"</font><br>");
    //n=parseInt(a/2);
    //alert(n);
    pr=Math.sqrt(a);
    pr=parseInt(pr);
    //i=0
    var i1=1;
    //var i2=1;
    ther=0;
    i=0
    //alert(pr);
    for(pi=2;pi<=pr;pi++)
        (//alert(array_pi[i]);
            flag=1;
            for(j=2;j<=(pi/2);j++)
                (
                    if(pi%j==0)
```

```
(
    flag=0;
    break;
)
)
if(flag==1)
(
    //ni=n%pi;
    //array_ni[i]=ni;
    array_pi[i]=pi;
    //array_pi2[i]=pi;
    //array_ai[i]=a%pi;
    //array_pi_ni[i]=pi-ni
    //alert(array_pi[i]);
    //document.write(array_pi[i]+"&nbsp;");
    i++;
)
)
//document.write("<br>");
ther=i;

for(i=0;i<a-12;i++) (
    array_a[i]=i+13;
    //document.write(array_a[i]+"&nbsp;");
    //alert(array_n[i]);
)
//document.write("<br>");
for(i=0;i<array_a.length;i++)
(
```

```

for(k=0;k<array_pi.length;k++)
(

    if(array_pi[k]!=2&&array_pi[k]!=5&&array_pi[k]!=7) (

        if((array_a[i]%array_pi[k]==0)||((array_a[i]%array_pi[k]==2)||
array_a[i]%array_pi[k]==6)||((array_a[i]%array_pi[k]==8))
            (
                array_a[i]=0;
                break;
            )
        ) else if(array_pi[k]==2) (
            if(array_a[i]%array_pi[k]==0)
            (
                array_a[i]=0;
                break;
            )
        ) else if(array_pi[k]==5) (

            if((array_a[i]%array_pi[k]==0)||((array_a[i]%array_pi[k]==2)||
array_a[i]%array_pi[k]==1)||((array_a[i]%array_pi[k]==3))
            (
                array_a[i]=0;
                break;
            )
        ) else if(array_pi[k]==7) (

            if((array_a[i]%array_pi[k]==0)||((array_a[i]%array_pi[k]==2)||
array_a[i]%array_pi[k]==6)||((array_a[i]%array_pi[k]==1))

```

```

        (
            array_a[i]=0;
            break;
        )
    )
)
)
x=0;
for(i=0;i<array_a.length;i++) (
    if(array_a[i]>0) (
        //document.write(array_a[i]+"&nbsp;");
        x++;
    )
    //alert(array_n[i]);
)

```

document.write("
从集合 N
中求得的双孪生素数的组数为: " + x + "
");

if(x>0) (
 document.write("从集合 N
中求得的双孪生素数为:
");

```

var astr=new String(a);
var thelength=astr.length;
var x11,x22,x33,x44;
m=1;
for(i=0;i<a-12;i++)
(
    switch(array_a[i])
    (

```



```

    )
    m=m+1;
)

)

)

document.all("wait_div").style.display="none";
document.all("wait2_div").style.display="";
)
</script>
</p></body>
</html>

```

7.4 实筛数据

输入的数 a 为: 20

从集合 N 中求得的双孪生素数的组数为: 2

从集合 N 中求得的双孪生素数为:

$x_1=05 \quad x_2=07 \quad x_3=11 \quad x_4=13$

$x_1=11 \quad x_2=13 \quad x_3=17 \quad x_4=19$

输入的数 a 为: 10000

从集合 N 中求得的双孪生素数的组数为: 10

从集合 N 中求得的双孪生素数为:

$x_1=00101 \quad x_2=00103 \quad x_3=00107 \quad x_4=00109$

$x_1=00191 \quad x_2=00193 \quad x_3=00197 \quad x_4=00199$

$x_1=00821 \quad x_2=00823 \quad x_3=00827 \quad x_4=00829$

$x_1=01481 \quad x_2=01483 \quad x_3=01487 \quad x_4=01489$

x1=01871	x2=01873	x3=01877	x4=01879
x1=02081	x2=02083	x3=02087	x4=02089
x1=03251	x2=03253	x3=03257	x4=03259
x1=03461	x2=03463	x3=03467	x4=03469
x1=05651	x2=05653	x3=05657	x4=05659
x1=09431	x2=09433	x3=09437	x4=09439

输入的数 a 为: 100000

从集合 N 中求得的双孪生素数的组数为: 34

从集合 N 中求得的双孪生素数为:

x1=000821	x2=000823	x3=000827	x4=000829
x1=001481	x2=001483	x3=001487	x4=001489
x1=001871	x2=001873	x3=001877	x4=001879
x1=002081	x2=002083	x3=002087	x4=002089
x1=003251	x2=003253	x3=003257	x4=003259
x1=003461	x2=003463	x3=003467	x4=003469
x1=005651	x2=005653	x3=005657	x4=005659
x1=009431	x2=009433	x3=009437	x4=009439
x1=013001	x2=013003	x3=013007	x4=013009
x1=015641	x2=015643	x3=015647	x4=015649
x1=015731	x2=015733	x3=015737	x4=015739
x1=016061	x2=016063	x3=016067	x4=016069
x1=018041	x2=018043	x3=018047	x4=018049
x1=018911	x2=018913	x3=018917	x4=018919
x1=019421	x2=019423	x3=019427	x4=019429
x1=021011	x2=021013	x3=021017	x4=021019
x1=022271	x2=022273	x3=022277	x4=022279
x1=025301	x2=025303	x3=025307	x4=025309
x1=031721	x2=031723	x3=031727	x4=031729
x1=034841	x2=034843	x3=034847	x4=034849
x1=043781	x2=043783	x3=043787	x4=043789

$x_1=051341$	$x_2=051343$	$x_3=051347$	$x_4=051349$
$x_1=055331$	$x_2=055333$	$x_3=055337$	$x_4=055339$
$x_1=062981$	$x_2=062983$	$x_3=062987$	$x_4=062989$
$x_1=067211$	$x_2=067213$	$x_3=067217$	$x_4=067219$
$x_1=069491$	$x_2=069493$	$x_3=069497$	$x_4=069499$
$x_1=072221$	$x_2=072223$	$x_3=072227$	$x_4=072229$
$x_1=077261$	$x_2=077263$	$x_3=077267$	$x_4=077269$
$x_1=079691$	$x_2=079693$	$x_3=079697$	$x_4=079699$
$x_1=081041$	$x_2=081043$	$x_3=081047$	$x_4=081049$
$x_1=082721$	$x_2=082723$	$x_3=082727$	$x_4=082729$
$x_1=088811$	$x_2=088813$	$x_3=088817$	$x_4=088819$
$x_1=097841$	$x_2=097843$	$x_3=097847$	$x_4=097849$
$x_1=099131$	$x_2=099133$	$x_3=099137$	$x_4=099139$

第八章 展翅孪生素数

“展翅孪生素数”是指一对孪生素数与其两侧差值为 4 的两个素数一起构成的素数组。(p_1, p_2, p_3, p_4 为素数, $p_1 - p_2 = 4$, $p_2 - p_3 = 2$, $p_3 - p_4 = 4$)。

“展翅孪生素数”是否有无穷多组, 亦未得到证明。就此论述如下。

8.1 求解证明

设 A 为大于 60000 的任意正整数, 将不超过 A 的全部正整数集合用 E 表示, 则 E 的基数 $|E|$ 为: $|E| = A$

以埃氏筛法求得不超过 $A^{1/2}$ 的全部素数集合 P , 且将集合 P 中元素按数值大小顺序排列如下:

$$P = (p_1, p_2, \dots, p_r)$$

$$2 = p_1 < p_2 < \dots < p_r \leq A^{1/2} \quad (1)$$

命集合 $N = (p_r + 1, p_r + 2, \dots, A)$, 则 N 的基数

$$|N| = n = A - p_r \quad (2)$$

用筛选方法从集合 N 中分选出必要的子集。

给定以下四个筛选条件:

$$g \not\equiv 0 \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (3)$$

$$g \not\equiv 4 \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (4)$$

$$g \not\equiv 6 \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (5)$$

$$g \not\equiv 10 \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (6)$$

g 表示集合 N 中被选元素。

从集合 N 中将同时符合 (3), (4), (5), (6) 式条件的所有元素分选出来, 组成子集 N_B , 再来讨论子集 N_B 的基数 $|N_B|$ (筛函数)。

8.1.1 求证筛函数的下界

集合 N 为自然数列集合, 模数集合 P 中的元素为互不相同的素数。根据第一章 (61) 式可知, $|N_B|$ 的近似估算式为

$$|N_B| = n \prod_{i=1}^r \left(\frac{\alpha_i}{p_i} \right) \quad (7)$$

根据第一章 (72) 式可知, 基数 $|N_B|$ 的下界计算公式为

$$|N_B| > n \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{p_i}{n} \right) \left(\frac{\alpha_i}{p_i} \right) \quad (8)$$

式中 α_i 为按照筛选条件所选取模 p_i 的同余类子集的个数, 下面具体确定 α_i 的数值:

当 $i=1$ 时, $p_1=2$

显然, 4, 6, 10 皆可被 2 整除, 故知, 此时 (3), (4), (5), (6) 式合并为一个条件:

$$g \not\equiv 0 \pmod{p_1} \quad (9)$$

依据 (9) 式可知, 集合 N 中只有模 p_1 的“1 同余类子集”一个符合条件, 故得

$$\alpha_1 = 1 \quad (10)$$

当 $i=2$ 时, $p_2=3$

由于 $6 \equiv 0 \pmod{3}$

$$10 \equiv 4 \pmod{3}$$

所以, 筛选条件 (3), (4), (5), (6) 合为两个条件:

$$g \not\equiv 0 \pmod{p_2} \quad (11)$$

$$g \not\equiv 4 \pmod{p_2} \quad (12)$$

依据 (11) 和 (12) 式可知, 集合 N 中只有模 p_2 的 “2 同余类子集” 符合筛选条件, 故得

$$\alpha_2 = 1 \quad (13)$$

当 $i=3$ 时, $p_3=5$

由于 $10 \equiv 0 \pmod{5}$

所以, 筛选条件 (3), (4), (5), (6) 式合为三个条件:

$$g \not\equiv 0 \pmod{p_3} \quad (14)$$

$$g \not\equiv 4 \pmod{p_3} \quad (15)$$

$$g \not\equiv 6 \pmod{p_3} \quad (16)$$

依据 (14), (15) 和 (16) 式可知, 集合 N 中只有模 p_3 的 “2 同余类子集” 和 “3 同余类子集” 符合筛选条件, 故得:

$$\alpha_3 = 2 \quad (17)$$

当 $i>3$ 时, 筛选条件 (3), (4), (5), (6) 对应于四个不同的同余类子集, 除了这四个同余类子集外其余 (p_i-4) 个模 p_i 的同余类子集都符合筛选条件, 故得

$$\alpha_i = p_i - 4, \quad i > 3 \quad (18)$$

将 (10), (13), (17) 和 (18) 式代入 (7) 式得

$$|N_B| = \left(\frac{n}{15}\right) \prod_{i=4}^r \left(\frac{p_i-4}{p_i}\right) \quad (19)$$

将 (10), (13), (17) 和 (18) 式代入 (8) 式得

$$|N_B| > F_1 \left\{ \frac{n}{15} \right\} \prod_{i=4}^r \left\{ \frac{p_i-4}{p_i} \right\} \quad (20)$$

$$F_1 = \prod_{i=1}^r (1 - \frac{p_i}{n}) > 1 - (\frac{1}{n}) \sum_{i=1}^r p_i \quad (21)$$

由第一章 (77) 式推得:

$$\Pi(x) - \Pi(\frac{x}{2}) < \Pi(\frac{x}{2}) \quad (22)$$

(22) 式表明, 数值越大的区域素数分布的密度越小, 故得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r p_i &= 17 + \sum_{i=5}^r p_i < 17 + (\frac{1}{2})(p_5 + p_r) \{ \Pi(p_r) - 4 \} = \\ &17 + \frac{(p_5 + p_r)}{2} \Pi(p_r) - 2(p_5 + p_r) \end{aligned} \quad (23)$$

根据切比晓夫不等式可知

$$\Pi(p_r) < (6 \ln 2)(p_r / \ln p_r) \quad (24)$$

(24) 式代入 (23) 式可得

$$\sum_{i=1}^r p_i < 17 - 2(p_5 + p_r) + \frac{(6 \ln 2)p_r(p_5 + p_r)}{2 \ln p_r} \quad (25)$$

将 (25) 式代入 (21) 式可得

$$F_1 > 1 + \frac{2(p_5 + p_r)}{n} - (\frac{17}{n} + \frac{2.08(p_5 + p_r)p_r}{n \ln p_r}) \quad (26)$$

将 (26) 式代入 (20) 式得

$$|N_B| > F_2 \prod_{i=4}^r (\frac{p_i - 4}{p_i}) - F_3 \prod_{i=4}^r (\frac{p_i - 4}{p_i}) \quad (27)$$

$$F_2 = \frac{n}{15} + \frac{2(p_5 + p_r)}{15} \quad (28)$$

$$F_3 = \frac{17}{15} + \frac{2.08(p_5 + p_r)p_r}{15 \ln p_r} \quad (29)$$

将 F_2 作以下变换

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_7}{p_9 - 4}\right) + F_2\left(\frac{2}{p_9 - 4}\right) \quad (30)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_8}{p_{10} - 4}\right) + F_2\left(\frac{6}{p_{10} - 4}\right) \quad (31)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_9}{p_{11} - 4}\right) + F_2\left(\frac{4}{p_{11} - 4}\right) \quad (32)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{10}}{p_{12} - 4}\right) + F_2\left(\frac{4}{p_{12} - 4}\right) \quad (33)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{11}}{p_{13} - 4}\right) + F_2\left(\frac{6}{p_{13} - 4}\right) \quad (34)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{12}}{p_{14} - 4}\right) + F_2\left(\frac{2}{p_{14} - 4}\right) \quad (35)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{13}}{p_{15} - 4}\right) + F_2\left(\frac{2}{p_{15} - 4}\right) \quad (36)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{14}}{p_{16} - 4}\right) + F_2\left(\frac{6}{p_{16} - 4}\right) \quad (37)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{15}}{p_{17} - 4}\right) + F_2\left(\frac{8}{p_{17} - 4}\right) \quad (38)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{16}}{p_{18} - 4}\right) + F_2\left(\frac{4}{p_{18} - 4}\right) \quad (39)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{17}}{p_{19} - 4}\right) + F_2\left(\frac{4}{p_{19} - 4}\right) \quad (40)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{18}}{p_{20} - 4}\right) + F_2\left(\frac{6}{p_{20} - 4}\right) \quad (41)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{19}}{p_{21} - 4}\right) + F_2\left(\frac{2}{p_{21} - 4}\right) \quad (42)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{20}}{p_{22} - 4}\right) + F_2\left(\frac{4}{p_{22} - 4}\right) \quad (43)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{21}}{p_{23}-4}\right) + F_2\left(\frac{6}{p_{23}-4}\right) \quad (44)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{22}}{p_{24}-4}\right) + F_2\left(\frac{6}{p_{24}-4}\right) \quad (45)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{23}}{p_{25}-4}\right) + F_2\left(\frac{10}{p_{25}-4}\right) \quad (46)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{24}}{p_{26}-4}\right) + F_2\left(\frac{8}{p_{26}-4}\right) \quad (47)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{25}}{p_{27}-4}\right) + F_2\left(\frac{2}{p_{27}-4}\right) \quad (48)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{26}}{p_{28}-4}\right) + F_2\left(\frac{2}{p_{28}-4}\right) \quad (49)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{27}}{p_{29}-4}\right) + F_2\left(\frac{2}{p_{29}-4}\right) \quad (50)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{28}}{p_{30}-4}\right) + F_2\left(\frac{2}{p_{30}-4}\right) \quad (51)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{29}}{p_{31}-4}\right) + F_2\left(\frac{14}{p_{31}-4}\right) \quad (52)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{30}}{p_{32}-4}\right) + F_2\left(\frac{14}{p_{32}-4}\right) \quad (53)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{31}}{p_{33}-4}\right) + F_2\left(\frac{6}{p_{33}-4}\right) \quad (54)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{32}}{p_{34}-4}\right) + F_2\left(\frac{4}{p_{34}-4}\right) \quad (55)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{33}}{p_{35}-4}\right) + F_2\left(\frac{8}{p_{35}-4}\right) \quad (56)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{34}}{p_{36}-4}\right) + F_2\left(\frac{8}{p_{36}-4}\right) \quad (57)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{35}}{p_{37}-4}\right) + F_2\left(\frac{4}{p_{37}-4}\right) \quad (58)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{36}}{p_{38}-4}\right) + F_2\left(\frac{8}{p_{38}-4}\right) \quad (59)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{37}}{p_{39}-4}\right) + F_2\left(\frac{6}{p_{39}-4}\right) \quad (60)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{38}}{p_{40}-4}\right) + F_2\left(\frac{6}{p_{40}-4}\right) \quad (61)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{39}}{p_{41}-4}\right) + F_2\left(\frac{8}{p_{41}-4}\right) \quad (62)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{40}}{p_{42}-4}\right) + F_2\left(\frac{4}{p_{42}-4}\right) \quad (63)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{41}}{p_{43}-4}\right) + F_2\left(\frac{8}{p_{43}-4}\right) \quad (64)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{42}}{p_{44}-4}\right) + F_2\left(\frac{8}{p_{44}-4}\right) \quad (65)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{43}}{p_{45}-4}\right) + F_2\left(\frac{2}{p_{45}-4}\right) \quad (66)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{44}}{p_{46}-4}\right) + F_2\left(\frac{2}{p_{46}-4}\right) \quad (67)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{45}}{p_{47}-4}\right) + F_2\left(\frac{10}{p_{47}-4}\right) \quad (68)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{46}}{p_{48}-4}\right) + F_2\left(\frac{20}{p_{48}-4}\right) \quad (69)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{47}}{p_{49}-4}\right) + F_2\left(\frac{12}{p_{49}-4}\right) \quad (70)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{48}}{p_{50}-4}\right) + F_2\left(\frac{2}{p_{50}-4}\right) \quad (71)$$

将 (30) ~ (71) 式逐次代入等式右端第一项, 可得

$$F_2 = F_2 \prod_{j=9}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j - 4} \right) + F_4 \quad (72)$$

$$\begin{aligned} F_4 = & \left(\frac{2F_2}{p_9 - 4} \right) \prod_{j=10}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j - 4} \right) + \left(\frac{6F_2}{p_{10} - 4} \right) \prod_{j=11}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j - 4} \right) + \\ & \left(\frac{4F_2}{p_{11} - 4} \right) \prod_{j=12}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j - 4} \right) + \left(\frac{4F_2}{p_{12} - 4} \right) \prod_{j=13}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j - 4} \right) + \\ & \left(\frac{6F_2}{p_{13} - 4} \right) \prod_{j=14}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j - 4} \right) + \left(\frac{2F_2}{p_{14} - 4} \right) \prod_{j=15}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j - 4} \right) + \\ & \left(\frac{2F_2}{p_{15} - 4} \right) \prod_{j=16}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j - 4} \right) + \left(\frac{6F_2}{p_{16} - 4} \right) \prod_{j=17}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j - 4} \right) + \\ & \left(\frac{8F_2}{p_{17} - 4} \right) \prod_{j=18}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j - 4} \right) + \left(\frac{4F_2}{p_{18} - 4} \right) \prod_{j=19}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j - 4} \right) + \\ & \left(\frac{4F_2}{p_{19} - 4} \right) \prod_{j=20}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j - 4} \right) + \left(\frac{6F_2}{p_{20} - 4} \right) \prod_{j=21}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j - 4} \right) + \\ & \left(\frac{2F_2}{p_{21} - 4} \right) \prod_{j=22}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j - 4} \right) + \left(\frac{4F_2}{p_{22} - 4} \right) \prod_{j=23}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j - 4} \right) + \\ & \left(\frac{6F_2}{p_{23} - 4} \right) \prod_{j=24}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j - 4} \right) + \left(\frac{6F_2}{p_{24} - 4} \right) \prod_{j=25}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j - 4} \right) + \\ & \left(\frac{10F_2}{p_{25} - 4} \right) \prod_{j=26}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j - 4} \right) + \left(\frac{8F_2}{p_{26} - 4} \right) \prod_{j=27}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j - 4} \right) + \\ & \left(\frac{2F_2}{p_{27} - 4} \right) \prod_{j=28}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j - 4} \right) + \left(\frac{2F_2}{p_{28} - 4} \right) \prod_{j=29}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j - 4} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{2F_2}{p_{29}-4}\right)\prod_{j=30}^{50}\left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \left(\frac{2F_2}{p_{30}-4}\right)\prod_{j=31}^{50}\left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \\
& \left(\frac{14F_2}{p_{31}-4}\right)\prod_{j=32}^{50}\left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \left(\frac{14F_2}{p_{32}-4}\right)\prod_{j=33}^{50}\left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \\
& \left(\frac{6F_2}{p_{33}-4}\right)\prod_{j=34}^{50}\left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \left(\frac{4F_2}{p_{34}-4}\right)\prod_{j=35}^{50}\left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \\
& \left(\frac{8F_2}{p_{35}-4}\right)\prod_{j=36}^{50}\left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \left(\frac{8F_2}{p_{36}-4}\right)\prod_{j=37}^{50}\left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \\
& \left(\frac{4F_2}{p_{37}-4}\right)\prod_{j=38}^{50}\left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \left(\frac{8F_2}{p_{38}-4}\right)\prod_{j=39}^{50}\left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \\
& \left(\frac{6F_2}{p_{39}-4}\right)\prod_{j=40}^{50}\left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \left(\frac{6F_2}{p_{40}-4}\right)\prod_{j=41}^{50}\left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \\
& \left(\frac{8F_2}{p_{41}-4}\right)\prod_{j=42}^{50}\left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \left(\frac{4F_2}{p_{42}-4}\right)\prod_{j=43}^{50}\left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \\
& \left(\frac{8F_2}{p_{43}-4}\right)\prod_{j=44}^{50}\left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \left(\frac{8F_2}{p_{44}-4}\right)\prod_{j=45}^{50}\left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \\
& \left(\frac{2F_2}{p_{45}-4}\right)\prod_{j=46}^{50}\left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \left(\frac{2F_2}{p_{46}-4}\right)\prod_{j=47}^{50}\left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \\
& \left(\frac{10F_2}{p_{47}-4}\right)\prod_{j=48}^{50}\left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \left(\frac{20F_2}{p_{48}-4}\right)\prod_{j=49}^{50}\left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right) + \\
& \left(\frac{12F_2}{p_{49}-4}\right)\left(\frac{p_{48}}{p_{50}-4}\right) + \left(\frac{2F_2}{p_{50}-4}\right) \tag{73}
\end{aligned}$$

将 $p_8=19$, $p_9=23$, $p_{10}=29$, $p_{11}=31$, $p_{12}=37$, $p_{13}=41$,
 $p_{14}=43$, $p_{15}=47$, $p_{16}=53$, $p_{17}=59$, $p_{18}=61$, $p_{19}=67$,

$p_{20}=71$, $p_{21}=73$, $p_{22}=79$, $p_{23}=83$, $p_{24}=89$, $p_{25}=97$,
 $p_{26}=101$, $p_{27}=103$, $p_{28}=107$, $p_{29}=109$, $p_{30}=113$,
 $p_{31}=127$, $p_{32}=131$, $p_{33}=137$, $p_{34}=139$, $p_{35}=149$,
 $p_{36}=151$, $p_{37}=157$, $p_{38}=163$, $p_{39}=167$, $p_{40}=173$,
 $p_{41}=179$, $p_{42}=181$, $p_{43}=191$, $p_{44}=193$, $p_{45}=197$,
 $p_{46}=199$, $p_{47}=211$, $p_{48}=223$, $p_{49}=227$, $p_{50}=229$ 代入
 (73) 式可得

$$F_4 = 0.9477F_2 \quad (74)$$

将 (74) 式代入 (72) 式得

$$F_2 = F_2 \prod_{j=9}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j - 4} \right) + 0.9477F_2 \quad (75)$$

将 (75) 式代入 (27) 式

$$|N_B| > F_2 \prod_{j=9}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j - 4} \right) \prod_{i=4}^r \left(\frac{p_i - 4}{p_i} \right) + F_5 \quad (76)$$

$$F_5 = (0.9477F_2 - F_3) \prod_{i=4}^r \left(\frac{p_i - 4}{p_i} \right) \quad (77)$$

$$\text{令 } F_6 = 0.9477F_2 - F_3 \quad (78)$$

得

$$F_5 = F_6 \prod_{i=4}^r \left(\frac{p_i - 4}{p_i} \right) \quad (79)$$

将 (28), (29) 式代入 (78) 式得

$$\begin{aligned}
 F_6 = 0.9477 \left\{ \frac{n}{15} + \frac{2(p_5 + p_r)}{15} \right\} - \\
 \left\{ \frac{17}{15} + \frac{2.08(p_5 + p_r)p_r}{15 \ln p_r} \right\}
 \end{aligned} \quad (80)$$

将 (1) 和 (2) 式代入 (80) 式整理可得:

$$F_6 \geq 0.2566 + \left\{ \frac{0.9477(p_r + 1)}{15} - \frac{2.08(p_5 + p_r)}{15 \ln p_r} \right\} p_r =$$

$$0.2566 + F_7 p_r \quad (81)$$

$$F_7 = 0.06318(p_r + 1) - \frac{0.1386(p_5 + p_r)}{\ln p_r} \quad (82)$$

$$\frac{dF_7}{dp_r} = 0.06318 - 0.1386 \left\{ \frac{\ln p_r - (p_5 + p_r)(1/p_r)}{\ln^2 p_r} \right\} =$$

$$0.06318 - \frac{0.1386}{\ln p_r} + \frac{0.1386(p_5 + p_r)}{p_r \ln^2 p_r} >$$

$$0.06318 - \frac{0.1386}{\ln p_r} \quad (83)$$

$$\text{令 } 0.06318 - \frac{0.1386}{\ln p_r} > 0$$

$$\text{得 } p_r > 8.969 \quad (84)$$

将 (84) 条件代入 (83) 式得

$$\frac{dF_7}{dp_r} > 0 \quad (p_r > 8.969) \quad (85)$$

由 (85) 式知, 当 $p_r > 8.969$ 时, F_7 为 p_r 的增值函数。

当 $A \geq 60000$ 时, $p_r \geq 241 > 8.969$

且 $F_7(p_r = 241) = 8.91$

故知, $F_7 > 8.9$ ($A \geq 60000$) (86)

(86) 代入 (81) 式得:

$F_6 > 0.2566 + 8.9 p_r$ 再代入 (79) 式:

$$F_5 > (0.2566 + 8.9 p_r) \prod_{i=4}^r \left(\frac{p_i - 4}{p_i} \right) \quad (87)$$

$$\text{已知, } p_i - 4 \geq p_{i-2}, \quad i \geq 4 \quad (88)$$

$$\begin{aligned} \text{故, } F_3 &> (0.25666 + 8.9p_r) \prod_{i=4}^r \left(\frac{p_{i-2}}{p_i} \right) = \\ & (0.25666 + 8.9p_r) \left(\frac{15}{p_{r-1}p_r} \right) > 0 \end{aligned} \quad (89)$$

将 (28) 式和 (89) 式代入 (76) 式得

$$|N_B| > \left\{ \frac{n}{15} + \frac{2(p_5 + p_r)}{15} \right\} \prod_{j=9}^{50} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j - 4} \right) \prod_{i=4}^r \left(\frac{p_i - 4}{p_i} \right) \quad (90)$$

将 (1) 式和 (2) 式代入 (90) 式得

$$\begin{aligned} |N_B| &> \left(\frac{p_r^2 + p_r + 22}{15} \right) \prod_{j=4}^8 \left(\frac{p_j - 4}{p_j} \right) \prod_{i=9}^r \left(\frac{p_{i-2}}{p_i} \right) = \\ & \left(\frac{p_r^2 + p_r + 22}{15} \right) \left(\frac{189}{1001} \right) \left(\frac{195}{p_7 p_8} \right) \left(\frac{p_7 p_8}{p_{r-1} p_r} \right) = \\ & (p_r^2 + p_r + 22) \left(\frac{2.4545}{p_{r-1} p_r} \right) \end{aligned} \quad (91)$$

已知, $p_r \geq p_{r-1} + 2$ 代入 (91) 式得

$$\begin{aligned} |N_B| &> (p_r p_{r-1} + 3p_r + 22) \left(\frac{2.4545}{p_r p_{r-1}} \right) = \\ & 2.4545 + \left\{ \frac{2.4545(3p_r + 22)}{p_r p_{r-1}} \right\} > 2.4545 \end{aligned} \quad (92)$$

8.1.2 通过子集 N_B 求解

从子集 N_B 中任取一个元素 m_1 , 再引入参量:

$$m_2 = m_1 - 4 \quad (93)$$

$$m_3 = m_1 - 6 \quad (94)$$

$$m_4 = m_1 - 10 \quad (95)$$

以集合 P 中各元素为模数, 求得同余式组:

$$m_1 \equiv m_{1i} \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$m_2 \equiv m_{2i} \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$m_3 \equiv m_{3i} \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$m_4 \equiv m_{4i} \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

由 m_1 的定义可知

$$m_1 \in E \quad m_1 > 1 \quad (96)$$

由于 $m_1 \in N_B$, 依据筛选条件 (3), (4), (5), (6) 式可知

$$m_{1i} \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (97)$$

$$m_{1i} \not\equiv 4 \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (98)$$

$$m_{1i} \not\equiv 6 \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (99)$$

$$m_{1i} \not\equiv 10 \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (100)$$

依据第一章引理 3, 由 (96), (97) 式可知

$$m_1 \text{ 为奇素数, 且 } m_1 > p_r \quad (101)$$

依据定义式 (93), (94), (95) 式和 (101) 式可知

$$m_2 \in E, \quad m_2 > 1 \quad (102)$$

$$m_3 \in E, \quad m_3 > 1 \quad (103)$$

$$m_4 \in E, \quad m_4 > 1 \quad (104)$$

依据同余式的性质, 由 (93), (94), (95) 式可推得

$$m_{2i} \equiv m_{1i} - 4 \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (105)$$

$$m_{3i} \equiv m_{1i} - 6 \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (106)$$

$$m_{4i} \equiv m_{1i} - 10 \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (107)$$

由 (98) 和 (105) 式可知

$$m_{2i} \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (108)$$

由 (99) 和 (106) 式可知

$$m_{3i} \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (109)$$

由 (100) 和 (107) 式可知

$$m_{4i} \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (110)$$

依据第一章引理 3, 由 (102), (108) 可知: m_2 为奇素数。

依据第一章引理 3, 由 (103), (109) 可知: m_3 为奇素数。

依据第一章引理 3, 由 (104), (110) 可知: m_4 为奇素数。

由 (93), (94), (95) 式可得,

$$m_1 - m_2 = 4 \quad (111)$$

$$m_2 - m_3 = 2 \quad (112)$$

$$m_3 - m_4 = 4 \quad (113)$$

由 (111), (112), (113) 式可见 (m_1, m_2, m_3, m_4) 为一组展翅孪生素数。

(注: $m_1, m_1 - 2, m_2, m_3, m_3 - 2, m_4$ 这六个数构成公差 $\Delta = 2$ 的正整数等差级数。若以素数 3 为模数, 则模数 3 与公差 2 互素。根据正整数等差级数的基本特征可知, 上述六个元素中任意相邻的三个元素都构成模 3 的完全剩余组。即任意相邻的三个元素中必定有一个能被 3 整除。由于 m_1, m_2, m_3, m_4 都是素数, 都不能被 3 整除, 所以, 只有 $m_1 - 2$ 和 $m_3 - 2$ 能被 3 整除, 故 $m_1 - 2$ 和 $m_3 - 2$ 为复合数)。

由 (110) 式可知, 素数 $m_4 > p_r$, 根据 p_r 的定义可知, 大于 p_r 的素数必定大于 $A^{1/2}$, 即有

$$m_4 > A^{1/2} \quad (114)$$

故由 (92) 式可知, 在区间 $(A, A^{1/2})$ 内至少有 3 组展翅孪生

素数。再考虑到前述求证过程中(86)式的限制条件,可得定律如下。

展翅孪生素数定律:对不小于 60000 的任意正整数 A 而言,在区间 $(A^{1/2}, A)$ 之内,至少有 3 组展翅孪生素数。

8.2 展翅孪生素数的无限性

根据前节给出的展翅孪生素数定律可知,在区间 $(A^{1/2}, A)$ ($A > 60000$) 之内至少有 3 组展翅孪生素数,同理在区间 (A, A^2) 内,也至少有 3 组展翅孪生素数……,依次类推,当 A 的指数趋于无穷大时,必定展翅孪生素数有无限多组。

8.3 求解程序

下面是用 ASP 写的求解程序,包括输入界面和运算显示两个文件。

第一个文件 (input.asp):

```
<html>
<head>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=
gb2312">
<LINK href="/style.css" type=text/css rel=stylesheet>
<title>展翅孪生素数</title>
<script language="JavaScript" >
function suborno() (
    var a=form1.a.value;
    if(a=="||a==null) (
        alert("请输入一个数字 (17 以上)! ");
        return;
    ) else if(parseInt(a)<17) (
```

[illegible]

```
</table>
</form>
<p align="center">&nbsp;</p>
</body>
</html>
```

第二个文件 (sievejs.asp):

```
<%a=clng(request.form("a"))  
%>  
<html>  
<head>  
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html;  
set=gb2312">  
<LINK href="./style.css" type=text/css rel=stylesheet>  
<title>孪生素数</title>  
</head>  
<body bgcolor="#BFC0B6"><br>&nbsp;<br>&nbsp;<br>&nbsp;<br>  
<div align="center" id="wait_div"><font color="#FF0000"  
="4"><strong>如果出现提示“.....是否取消该脚本？”，请点  
否”，并请耐心等待！</strong></font></div>  
<div align="center" id="wait2_div" style="display:none"><font  
="#FF0000" size="5"><strong>展翅孪生素数求解运算结果  
rong></font></div>  
<p><script language="JavaScript">  
var a,i,p,j,flag,ni,n,m,x,y,k,pr,ther,num1,num2,num3;  
//var array_ni = new Array();  
var array_pi = new Array();  
//var array_pi2 = new Array();  
var array_a = new Array();
```

```
//var array_ai = new Array();
var array_hi = new Array();
//var array_pi_ni = new Array()
//a=clng(request.form("a"))
num1=0;
num2=0;
num3=0;
a=parseInt("<%=a%>");
if (a<17)
(
    document.write("输入错误! ");
) else (
    document.write("<font color=#FF0000 size='4'>输入的数 a
为: </font><font color=#8000FF size=4>" + a + "</font><br>");
    //n=parseInt(a/2);
    //alert(n);
    pr=Math.sqrt(a);
    pr=parseInt(pr);
    //i=0
    var i1=1;
    //var i2=1;
    ther=0;
    i=0
    //alert(pr);
    for(pi=2;pi<=pr;pi++)
        (//alert(array_pi[i]);
            flag=1;
            for(j=2;j<=(pi/2);j++)
                (
                    if(pi%j==0)
```

```
(
    flag=0;
    break;
)
)
if(flag==1)
(
    //ni=n%pi;
    //array_ni[i]=ni;
    array_pi[i]=pi;
    //array_pi2[i]=pi;
    //array_ai[i]=a%pi;
    //array_pi_ni[i]=pi-ni
    //alert(array_pi[i]);
    //document.write(array_pi[i]+"&nbsp;");
    i++;
)
)
//document.write("<br>");
ther=i;

for(i=0;i<a-16;i++) (
    array_a[i]=i+17;
    //document.write(array_a[i]+"&nbsp;");
    //alert(array_n[i]);
)
//document.write("<br>");
for(i=0;i<array_a.length;i++)
(
```

```
for(k=0;k<array_pi.length;k++)
(
    if(array_pi[k]!=2&&array_pi[k]!=3&&array_pi[k]!=5&&array_pi[k]!=7) (

        if((array_a[i]%array_pi[k]==0)||((array_a[i]%array_pi[k]==4)||
array_a[i]%array_pi[k]==6)||((array_a[i]%array_pi[k]==10))
            (
                array_a[i]=0;
                break;
            )
        ) else if(array_pi[k]==2) (
            if(array_a[i]%array_pi[k]==0)
            (
                array_a[i]=0;
                break;
            )
        ) else if(array_pi[k]==3) (

            if((array_a[i]%array_pi[k]==0)||((array_a[i]%array_pi[k]==1))
            (
                array_a[i]=0;
                break;
            )
        ) else if(array_pi[k]==5) (

            if((array_a[i]%array_pi[k]==0)||((array_a[i]%array_pi[k]==4)||
array_a[i]%array_pi[k]==1))
            (
                array_a[i]=0;
```



```

        break;
    )
    ) else if(array_pi[k]==7) (

        if((array_a[i]%array_pi[k]==0)||((array_a[i]%array_pi[k]==4)||
array_a[i]%array_pi[k]==6)||((array_a[i]%array_pi[k]==3))
        (
            array_a[i]=0;
            break;
        )
    )
    )
    )
    x=0;
    for(i=0;i<array_a.length;i++) (
        if(array_a[i]>0) (
            //document.write(array_a[i]+"&nbsp;");
            x++;
        )
        //alert(array_n[i]);
    )

    document.write("<br><font color=#0000FF size=3>从集合 N
中求得的展翅孪生素数的组数为: </font>" + x + "<br>");
    if(x>0) (
        document.write("<font color=#0000FF size=3>从集合 N
中求得的展翅孪生素数为: </font><br>");
        var astr=new String(a);
        var thelength=astr.length;

```

```

var x11,x22,x33,x44;
m=1;
for(i=0;i<array_a.length;i++)
(
    switch(array_a[i])
    (
        case 0: break;
        default:
            x1=array_a[i];
            x2=array_a[i]-4;
            x3=array_a[i]-6;
            x4=array_a[i]-10;
            x11=new String(x1);
            for(var iii=x11.length;iii<thelength;iii++) (
                x11="0"+" "+x11;
            )
            x22=new String(x2);
            for(var iii=x22.length;iii<thelength;iii++) (
                x22="0"+" "+x22;
            )
            x33=new String(x3);
            for(var iii=x33.length;iii<thelength;iii++) (
                x33="0"+" "+x33;
            )
            x44=new String(x4);
            for(var iii=x44.length;iii<thelength;iii++) (
                x44="0"+" "+x44;
            )
            document.write("<font
size='4'>x</font>1="+x44+"&nbsp;&nbsp; <font

```


从集合 N 中求得的展翅孪生素数为:

$x_1=00103$	$x_2=00107$	$x_3=00109$	$x_4=00113$
$x_1=00223$	$x_2=00227$	$x_3=00229$	$x_4=00233$
$x_1=00307$	$x_2=00311$	$x_3=00313$	$x_4=00317$
$x_1=00457$	$x_2=00461$	$x_3=00463$	$x_4=00467$
$x_1=00853$	$x_2=00857$	$x_3=00859$	$x_4=00863$
$x_1=00877$	$x_2=00881$	$x_3=00883$	$x_4=00887$
$x_1=01087$	$x_2=01091$	$x_3=01093$	$x_4=01097$
$x_1=01297$	$x_2=01301$	$x_3=01303$	$x_4=01307$
$x_1=01423$	$x_2=01427$	$x_3=01429$	$x_4=01433$
$x_1=01483$	$x_2=01487$	$x_3=01489$	$x_4=01493$
$x_1=01867$	$x_2=01871$	$x_3=01873$	$x_4=01877$
$x_1=01993$	$x_2=01997$	$x_3=01999$	$x_4=02003$
$x_1=02683$	$x_2=02687$	$x_3=02689$	$x_4=02693$
$x_1=03457$	$x_2=03461$	$x_3=03463$	$x_4=03467$
$x_1=04513$	$x_2=04517$	$x_3=04519$	$x_4=04523$
$x_1=04783$	$x_2=04787$	$x_3=04789$	$x_4=04793$
$x_1=05227$	$x_2=05231$	$x_3=05233$	$x_4=05237$
$x_1=05647$	$x_2=05651$	$x_3=05653$	$x_4=05657$
$x_1=06823$	$x_2=06827$	$x_3=06829$	$x_4=06833$
$x_1=07873$	$x_2=07877$	$x_3=07879$	$x_4=07883$
$x_1=08287$	$x_2=08291$	$x_3=08293$	$x_4=08297$

输入的数 a 为: 200000

从集合 N 中求得的展翅孪生素数的组数为: 117

从集合 N 中求得的展翅孪生素数为:

$x_1=000457$	$x_2=000461$	$x_3=000463$	$x_4=000467$
$x_1=000853$	$x_2=000857$	$x_3=000859$	$x_4=000863$
$x_1=000877$	$x_2=000881$	$x_3=000883$	$x_4=000887$
$x_1=001087$	$x_2=001091$	$x_3=001093$	$x_4=001097$

x1=001297	x2=001301	x3=001303	x4=001307
x1=001423	x2=001427	x3=001429	x4=001433
x1=001483	x2=001487	x3=001489	x4=001493
x1=001867	x2=001871	x3=001873	x4=001877
x1=001993	x2=001997	x3=001999	x4=002003
x1=002683	x2=002687	x3=002689	x4=002693
x1=003457	x2=003461	x3=003463	x4=003467
x1=004513	x2=004517	x3=004519	x4=004523
x1=004783	x2=004787	x3=004789	x4=004793
x1=005227	x2=005231	x3=005233	x4=005237
x1=005647	x2=005651	x3=005653	x4=005657
x1=006823	x2=006827	x3=006829	x4=006833
x1=007873	x2=007877	x3=007879	x4=007883
x1=008287	x2=008291	x3=008293	x4=008297
x1=010453	x2=010457	x3=010459	x4=010463
x1=013687	x2=013691	x3=013693	x4=013697
x1=013873	x2=013877	x3=013879	x4=013883
x1=015727	x2=015731	x3=015733	x4=015737
x1=016057	x2=016061	x3=016063	x4=016067
x1=016063	x2=016067	x3=016069	x4=016073
x1=016183	x2=016187	x3=016189	x4=016193
x1=017383	x2=017387	x3=017389	x4=017393
x1=019417	x2=019421	x3=019423	x4=019427
x1=019423	x2=019427	x3=019429	x4=019433
x1=020743	x2=020747	x3=020749	x4=020753
x1=021013	x2=021017	x3=021019	x4=021023
x1=021313	x2=021317	x3=021319	x4=021323
x1=022273	x2=022277	x3=022279	x4=022283
x1=023053	x2=023057	x3=023059	x4=023063
x1=023557	x2=023561	x3=023563	x4=023567
x1=023623	x2=023627	x3=023629	x4=023633

x1=024103	x2=024107	x3=024109	x4=024113
x1=027733	x2=027737	x3=027739	x4=027743
x1=029017	x2=029021	x3=029023	x4=029027
x1=031387	x2=031391	x3=031393	x4=031397
x1=033343	x2=033347	x3=033349	x4=033353
x1=033613	x2=033617	x3=033619	x4=033623
x1=035527	x2=035531	x3=035533	x4=035537
x1=036007	x2=036011	x3=036013	x4=036017
x1=037987	x2=037991	x3=037993	x4=037997
x1=040423	x2=040427	x3=040429	x4=040433
x1=042013	x2=042017	x3=042019	x4=042023
x1=042457	x2=042461	x3=042463	x4=042467
x1=043777	x2=043781	x3=043783	x4=043787
x1=043783	x2=043787	x3=043789	x4=043793
x1=044263	x2=044267	x3=044269	x4=044273
x1=045817	x2=045821	x3=045823	x4=045827
x1=051193	x2=051197	x3=051199	x4=051203
x1=054493	x2=054497	x3=054499	x4=054503
x1=055333	x2=055337	x3=055339	x4=055343
x1=055813	x2=055817	x3=055819	x4=055823
x1=060913	x2=060917	x3=060919	x4=060923
x1=079687	x2=079691	x3=079693	x4=079697
x1=080677	x2=080681	x3=080683	x4=080687
x1=081013	x2=081017	x3=081019	x4=081023
x1=082003	x2=082007	x3=082009	x4=082013
x1=086287	x2=086291	x3=086293	x4=086297
x1=088657	x2=088661	x3=088663	x4=088667
x1=088807	x2=088811	x3=088813	x4=088817
x1=090397	x2=090401	x3=090403	x4=090407
x1=090523	x2=090527	x3=090529	x4=090533
x1=091453	x2=091457	x3=091459	x4=091463

$x_1=092377$	$x_2=092381$	$x_3=092383$	$x_4=092387$
$x_1=092857$	$x_2=092861$	$x_3=092863$	$x_4=092867$
$x_1=093487$	$x_2=093491$	$x_3=093493$	$x_4=093497$
$x_1=093553$	$x_2=093557$	$x_3=093559$	$x_4=093563$
$x_1=095083$	$x_2=095087$	$x_3=095089$	$x_4=095093$
$x_1=096997$	$x_2=097001$	$x_3=097003$	$x_4=097007$
$x_1=098317$	$x_2=098321$	$x_3=098323$	$x_4=098327$
$x_1=101107$	$x_2=101111$	$x_3=101113$	$x_4=101117$
$x_1=101527$	$x_2=101531$	$x_3=101533$	$x_4=101537$
$x_1=108877$	$x_2=108881$	$x_3=108883$	$x_4=108887$
$x_1=110563$	$x_2=110567$	$x_3=110569$	$x_4=110573$
$x_1=110917$	$x_2=110921$	$x_3=110923$	$x_4=110927$
$x_1=111487$	$x_2=111491$	$x_3=111493$	$x_4=111497$
$x_1=113017$	$x_2=113021$	$x_3=113023$	$x_4=113027$
$x_1=113143$	$x_2=113147$	$x_3=113149$	$x_4=113153$
$x_1=113167$	$x_2=113171$	$x_3=113173$	$x_4=113177$
$x_1=114193$	$x_2=114197$	$x_3=114199$	$x_4=114203$
$x_1=115873$	$x_2=115877$	$x_3=115879$	$x_4=115883$
$x_1=116923$	$x_2=116927$	$x_3=116929$	$x_4=116933$
$x_1=118897$	$x_2=118901$	$x_3=118903$	$x_4=118907$
$x_1=120937$	$x_2=120941$	$x_3=120943$	$x_4=120947$
$x_1=123727$	$x_2=123731$	$x_3=123733$	$x_4=123737$
$x_1=126223$	$x_2=126227$	$x_3=126229$	$x_4=126233$
$x_1=132523$	$x_2=132527$	$x_3=132529$	$x_4=132533$
$x_1=134587$	$x_2=134591$	$x_3=134593$	$x_4=134597$
$x_1=136393$	$x_2=136397$	$x_3=136399$	$x_4=136403$
$x_1=144163$	$x_2=144167$	$x_3=144169$	$x_4=144173$
$x_1=148147$	$x_2=148151$	$x_3=148153$	$x_4=148157$
$x_1=150373$	$x_2=150377$	$x_3=150379$	$x_4=150383$
$x_1=151237$	$x_2=151241$	$x_3=151243$	$x_4=151247$
$x_1=152833$	$x_2=152837$	$x_3=152839$	$x_4=152843$

$x_1=153067$	$x_2=153071$	$x_3=153073$	$x_4=153077$
$x_1=155377$	$x_2=155381$	$x_3=155383$	$x_4=155387$
$x_1=163477$	$x_2=163481$	$x_3=163483$	$x_4=163487$
$x_1=163987$	$x_2=163991$	$x_3=163993$	$x_4=163997$
$x_1=164617$	$x_2=164621$	$x_3=164623$	$x_4=164627$
$x_1=165703$	$x_2=165707$	$x_3=165709$	$x_4=165713$
$x_1=166843$	$x_2=166847$	$x_3=166849$	$x_4=166853$
$x_1=171043$	$x_2=171047$	$x_3=171049$	$x_4=171053$
$x_1=172213$	$x_2=172217$	$x_3=172219$	$x_4=172223$
$x_1=173773$	$x_2=173777$	$x_3=173779$	$x_4=173783$
$x_1=177883$	$x_2=177887$	$x_3=177889$	$x_4=177893$
$x_1=179947$	$x_2=179951$	$x_3=179953$	$x_4=179957$
$x_1=187123$	$x_2=187127$	$x_3=187129$	$x_4=187133$
$x_1=190573$	$x_2=190577$	$x_3=190579$	$x_4=190583$
$x_1=191827$	$x_2=191831$	$x_3=191833$	$x_4=191837$
$x_1=193597$	$x_2=193601$	$x_3=193603$	$x_4=193607$
$x_1=195043$	$x_2=195047$	$x_3=195049$	$x_4=195053$
$x_1=195733$	$x_2=195737$	$x_3=195739$	$x_4=195743$
$x_1=195967$	$x_2=195971$	$x_3=195973$	$x_4=195977$
$x_1=198823$	$x_2=198827$	$x_3=198829$	$x_4=198833$

第九章 相邻等差三素数

三个相邻素数组成的等差级数是否有无穷多组,本章将对这一问题进行讨论。

9.1 求解证明

设 A 为大于 23000 的正整数,将不超过 A 的全部正整数集合用 E 表示。

以埃氏(Eratosthenes)筛法求得不超过 $A^{1/2}$ 的全部素数集合 P ,并将 P 中元素按数值大小顺序排列如下:

$$P = (p_1, p_2, \dots, p_r)$$

$$2 = p_1 < p_2 < \dots < p_r \leq A^{1/2} \quad (1)$$

将不超过 A 且大于 p_r 的全部正整数集合用 N 表示,
 $N = (p_r + 1, p_r + 2, \dots, A)$, 则基数 $|N|$ 为

$$|N| = A - p_r \quad (2)$$

用筛选方法从集合 N 中分选出必要的子集。

给定筛选条件:

$$g \equiv 1 \pmod{p_1} \quad (3)$$

$$g \equiv 2 \pmod{p_2} \quad (4)$$

$$g \equiv 4 \pmod{p_3} \quad (5)$$

$$g \equiv 3 \pmod{p_4} \quad (6)$$

$$g \not\equiv 0 \pmod{p_i}, \quad i = 5, 6, \dots, r \quad (7)$$

$$g \not\equiv 6 \pmod{p_i}, \quad i = 5, 6, \dots, r \quad (8)$$

$$g \not\equiv 12 \pmod{p_i}, \quad i = 5, 6, \dots, r \quad (9)$$

g 表示集合 N 中被选元素。

从集合 N 中将同时符合 (3), (4), (5), (6), (7), (8) 和 (9) 式条件的所有元素分选出来, 组成子集 N_B 再来讨论子集 N_B 的基数 $|N_B|$ (筛函数)。

9.1.1 求证筛函数的下界

集合 N 为自然数列集合, 模数集合 P 中元素为互不相同的素数, 根据第一章的相关公式 (61) 式可知, 基数 $|N_B|$ 的近似估算公式为

$$|N_B| = |N| \prod_{i=1}^r \left(\frac{\alpha_i}{p_i} \right) \quad (10)$$

根据第一章中公式 (72) 式可知基数 $|N_B|$ 的下界计算公式为:

$$|N_B| > |N| \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{p_i}{|N|} \right) \left(\frac{\alpha_i}{p_i} \right) \quad (11)$$

式中 α_i 为按照筛选条件所选取的模 p_i 的同余类子集的个数, 下面具体确定 α_i 的数值。

根据 (3) 式可知, 集合 N 中按模数 p_1 只有模 p_1 的“1 同余类子集”符合筛选条件, 故得,

$$\alpha_1 = 1 \quad (12)$$

根据 (4) 式可知, 集合 N 中按模数 p_2 只有模 p_2 的“2 同余类子集”符合筛选条件, 故得

$$\alpha_2 = 1 \quad (13)$$

根据 (5) 式可知, 集合 N 中按模数 p_3 只有模 p_3 的“4 同余类子集”符合筛选条件, 故得

$$\alpha_3 = 1 \quad (14)$$

根据(6)式可知, 集合 N 中按模数 p_4 只有模 p_4 的“3 同余类子集”符合筛选条件, 故得

$$\alpha_4 = 1 \quad (15)$$

当 $i \geq 5$ 时, $0, 6, 12$ 对于模 p_i 两两皆不同余, 即 $0, 6, 12$ 属于三个不同的同余类子集。故知, 集合 N 中有三个模 p_i 的同余类子集不符合筛选条件, 其余 $(p_i - 3)$ 个模 p_i 的同余类子集都符合筛选条件, 故得

$$\alpha_i = p_i - 3, \quad i = 5, 6, 7, \dots, r \quad (16)$$

将(12), (13), (14), (15)和(16)式代入(10)式,

$$|N_B| = |N| \prod_{i=1}^4 \left(\frac{1}{p_i}\right) \prod_{j=5}^r \left(\frac{p_j - 3}{p_j}\right) \quad (17)$$

将(12), (13), (14), (15)和(16)式代入(11)式,

$$|N_B| > F_1 |N| \prod_{i=1}^4 \left(\frac{1}{p_i}\right) \prod_{j=5}^r \left(\frac{p_j - 3}{p_j}\right) \quad (18)$$

$$F_1 = \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{p_i}{|N|}\right) > 1 - \left(\frac{1}{|N|}\right) \sum_{i=1}^r p_i \quad (19)$$

由第一章(77)式推得

$$\Pi(x) - \Pi\left(\frac{x}{2}\right) < \Pi\left(\frac{x}{2}\right) \quad (20)$$

由(20)式可知, 数值越大的区域素数分布的密度越小, 故得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r p_i &= 17 + \sum_{i=5}^r p_i < 17 + \left(\frac{p_5 + p_r}{2}\right)(\Pi(p_r) - 4) = \\ &17 + \left(\frac{p_5 + p_r}{2}\right)\Pi(p_r) - 2(p_5 + p_r) \end{aligned} \quad (21)$$

根据切比晓夫不等式可知,

$$\Pi(p_r) < (6 \ln 2) \left(\frac{p_r}{\ln p_r}\right) \quad (22)$$

由 (21) 和 (22) 式, 可得

$$\sum_{i=1}^r p_i < 17 + \frac{(6 \ln 2) p_r (p_5 + p_r)}{2 \ln p_r} - 2(p_5 + p_r) \quad (23)$$

将 (23) 代入 (19) 式, 得

$$F_1 > 1 + \frac{2(p_5 + p_r)}{|N|} - \left\{ \frac{17}{|N|} + \frac{2.08 p_r (p_5 + p_r)}{|N| \ln p_r} \right\} \quad (24)$$

将 (24) 代入 (18) 式, 得

$$|N_B| > F_2 \prod_{j=5}^r \left(\frac{p_j - 3}{p_j} \right) - F_3 \prod_{j=5}^r \left(\frac{p_j - 3}{p_j} \right) \quad (25)$$

$$F_2 = \frac{|N|}{210} + \frac{p_5 + p_r}{105} \quad (26)$$

$$F_3 = \frac{17}{210} + \frac{2.08 p_r (p_5 + p_r)}{210 \ln p_r} \quad (27)$$

将 F_2 作以下变换:

$$F_2 = F_2 \left(\frac{p_{10}}{p_{12} - 3} \right) + F_2 \left(\frac{5}{p_{12} - 3} \right) \quad (28)$$

$$F_2 = F_2 \left(\frac{p_{11}}{p_{13} - 3} \right) + F_2 \left(\frac{7}{p_{13} - 3} \right) \quad (29)$$

$$F_2 = F_2 \left(\frac{p_{12}}{p_{14} - 3} \right) + F_2 \left(\frac{3}{p_{14} - 3} \right) \quad (30)$$

$$F_2 = F_2 \left(\frac{p_{13}}{p_{15} - 3} \right) + F_2 \left(\frac{3}{p_{15} - 3} \right) \quad (31)$$

$$F_2 = F_2 \left(\frac{p_{14}}{p_{16} - 3} \right) + F_2 \left(\frac{7}{p_{16} - 3} \right) \quad (32)$$

$$F_2 = F_2 \left(\frac{p_{15}}{p_{17} - 3} \right) + F_2 \left(\frac{9}{p_{17} - 3} \right) \quad (33)$$

$$F_2 = F_2 \left(\frac{p_{16}}{p_{18} - 3} \right) + F_2 \left(\frac{5}{p_{18} - 3} \right) \quad (34)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{17}}{p_{19}-3}\right) + F_2\left(\frac{5}{p_{19}-3}\right) \quad (35)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{18}}{p_{20}-3}\right) + F_2\left(\frac{7}{p_{20}-3}\right) \quad (36)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{19}}{p_{21}-3}\right) + F_2\left(\frac{3}{p_{21}-3}\right) \quad (37)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{20}}{p_{22}-3}\right) + F_2\left(\frac{5}{p_{22}-3}\right) \quad (38)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{21}}{p_{23}-3}\right) + F_2\left(\frac{7}{p_{23}-3}\right) \quad (39)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{22}}{p_{24}-3}\right) + F_2\left(\frac{7}{p_{24}-3}\right) \quad (40)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{23}}{p_{25}-3}\right) + F_2\left(\frac{11}{p_{25}-3}\right) \quad (41)$$

$$F_2 = F_2\left(\frac{p_{24}}{p_{26}-3}\right) + F_2\left(\frac{9}{p_{26}-3}\right) \quad (42)$$

将 (28) ~ (42) 式逐次代入右端第一项得

$$F_2 = F_2 \prod_{i=12}^{26} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i-3}\right) + F_4 \quad (43)$$

其中

$$\begin{aligned} F_4 = & \left(\frac{5F_2}{p_{12}-3}\right) \prod_{i=13}^{26} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i-3}\right) + \left(\frac{7F_2}{p_{13}-3}\right) \prod_{i=14}^{26} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i-3}\right) + \\ & \left(\frac{3F_2}{p_{14}-3}\right) \prod_{i=15}^{26} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i-3}\right) + \left(\frac{3F_2}{p_{15}-3}\right) \prod_{i=16}^{26} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i-3}\right) + \\ & \left(\frac{7F_2}{p_{16}-3}\right) \prod_{i=17}^{26} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i-3}\right) + \left(\frac{9F_2}{p_{17}-3}\right) \prod_{i=18}^{26} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i-3}\right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{5F_2}{p_{18}-3}\right)\prod_{i=19}^{26}\left(\frac{p_{i-2}}{p_i-3}\right) + \left(\frac{5F_2}{p_{19}-3}\right)\prod_{i=20}^{26}\left(\frac{p_{i-2}}{p_i-3}\right) + \\
& \left(\frac{7F_2}{p_{20}-3}\right)\prod_{i=21}^{26}\left(\frac{p_{i-2}}{p_i-3}\right) + \left(\frac{3F_2}{p_{21}-3}\right)\prod_{i=22}^{26}\left(\frac{p_{i-2}}{p_i-3}\right) + \\
& \left(\frac{5F_2}{p_{22}-3}\right)\prod_{i=23}^{26}\left(\frac{p_{i-2}}{p_i-3}\right) + \left(\frac{7F_2}{p_{23}-3}\right)\prod_{i=24}^{26}\left(\frac{p_{i-2}}{p_i-3}\right) + \\
& \left(\frac{7F_2}{p_{24}-3}\right)\prod_{i=25}^{26}\left(\frac{p_{i-2}}{p_i-3}\right) + \\
& \left(\frac{11F_2}{p_{25}-3}\right)\left(\frac{p_{24}}{p_{26}-3}\right) + \left(\frac{9F_2}{p_{26}-3}\right) \quad (44)
\end{aligned}$$

将 $p_{11}=31$, $p_{12}=37$, $p_{13}=41$, $p_{14}=43$, $p_{15}=47$,
 $p_{16}=53$, $p_{17}=59$, $p_{18}=61$, $p_{19}=67$, $p_{20}=71$, $p_{21}=73$,
 $p_{22}=79$, $p_{23}=83$, $p_{24}=89$, $p_{25}=97$, $p_{26}=101$ 代入 (44)
 式可得

$$F_4 = 0.8033F_2 \quad (45)$$

将 (45) 代入 (43) 式, 得

$$F_2 = F_2 \prod_{i=12}^{26} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i-3}\right) + 0.8033F_2 \quad (46)$$

将 (46) 代入 (25) 式, 可得

$$\begin{aligned}
|N_B| & > F_2 \prod_{i=12}^{26} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i-3}\right) \prod_{j=5}^r \left(\frac{p_j-3}{p_j}\right) + \\
& (0.8033F_2 - F_3) \prod_{j=5}^r \left(\frac{p_j-3}{p_j}\right) \quad (47)
\end{aligned}$$

$$\text{令 } F_5 = 0.8033F_2 - F_3 \quad (48)$$

得

$$|N_B| > F_2 \prod_{i=12}^{26} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i - 3} \right) \prod_{j=5}^r \left(\frac{p_j - 3}{p_j} \right) + F_5 \prod_{j=5}^r \left(\frac{p_j - 3}{p_j} \right). \quad (49)$$

将 (26), (27) 式代入 (48) 式, 得

$$F_5 = \frac{0.8033|N|}{210} + \frac{0.8033(p_5 + p_r)}{105} - \frac{17}{210} - \frac{2.08p_r(p_5 + p_r)}{210 \ln p_r} \quad (50)$$

将 (1), (2) 式代入 (50) 式, 得

$$F_5 \geq 0.0032029 + F_6 p_r \quad (51)$$

$$\text{其中: } F_6 = \frac{0.8033}{210} + \left(\frac{0.8033}{210} \right) p_r - \left\{ \frac{2.08(p_5 + p_r)}{210 \ln p_r} \right\} \quad (52)$$

对 F_6 求导数, 可得

$$\begin{aligned} \frac{dF_6}{dp_r} &= \frac{0.8033}{210} - \left(\frac{2.08}{210} \right) \left\{ \frac{\ln p_r - (p_5 + p_r)(1/p_r)}{\ln^2 p_r} \right\} = \\ &= \frac{0.8033}{210} - \frac{2.08}{210 \ln p_r} + \frac{2.08(p_5 + p_r)}{210 p_r \ln^2 p_r} > \\ &= \frac{0.8033}{210} - \frac{2.08}{210 \ln p_r} \end{aligned} \quad (53)$$

$$\text{令 } \frac{0.8033}{210} - \frac{2.08}{210 \ln p_r} > 0$$

$$\text{得, } p_r > 13.32 \quad (54)$$

将条件 (54) 式代入 (53) 式, 可得

$$\frac{dF_6}{dp_r} > 0 \quad (p_r > 13.32) \quad (55)$$

由 (55) 式可知, 当 $p_r > 13.32$ 时, F_6 为 p_r 的递增函数。

当 $A > 23000$ 时, $p_r \geq 151 > 13.32$

且有 $F_6(p_r = 151) = 54.9$

$$\text{故知 } F_6 > 54 \quad (A > 23000) \quad (56)$$

将 (56) 式代入 (51) 式, 得

$$F_5 > 0.0032029 + 54p_r \quad (57)$$

将 (57) 式代入 (49) 式, 得

$$\begin{aligned} |N_B| &> F_2 \prod_{i=12}^{26} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i - 3} \right) \prod_{j=5}^r \left(\frac{p_j - 3}{p_j} \right) + \\ &\{0.0032029 + 54p_r\} \prod_{j=5}^r \left(\frac{p_j - 3}{p_j} \right) > \\ &F_2 \prod_{i=12}^{26} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i - 3} \right) \prod_{j=5}^r \left(\frac{p_j - 3}{p_j} \right) \end{aligned} \quad (58)$$

$$\text{已知, } p_j - 3 > p_{j-2} \quad j \geq 4 \quad (59)$$

将 (26) 和 (59) 式代入 (58) 式, 得

$$|N_B| > \left\{ \frac{|N|}{210} + \frac{p_5 + p_r}{105} \right\} \prod_{i=5}^{11} \left(\frac{p_i - 3}{p_i} \right) \prod_{j=12}^r \left(\frac{p_{j-2}}{p_j} \right) \quad (60)$$

将 (1) 和 (2) 式代入 (60) 式, 得

$$|N_B| > \left\{ \frac{p_r^2 - p_r}{210} + \frac{p_5 + p_r}{105} \right\} \left\{ \frac{(p_{10} - 3)(p_{11} - 3)}{p_{r-1}p_r} \right\} \prod_{i=5}^9 \left(\frac{p_i - 3}{p_i} \right) \quad (61)$$

将 $p_5 = 11$, $p_6 = 13$, $p_7 = 17$, $p_8 = 19$, $p_9 = 23$, $p_{10} = 29$, $p_{11} = 31$ 代入 (61) 式, 可得

$$\begin{aligned} |N_B| &> \left\{ \frac{p_r^2 - p_r}{210} + \frac{2(p_5 + p_r)}{210} \right\} \left(\frac{728}{p_r p_{r-1}} \right) \left(\frac{358400}{1062347} \right) = \\ &\left(\frac{p_r^2}{210} + \frac{p_r}{210} + \frac{22}{210} \right) \left(\frac{260915200}{1062347 p_r p_{r-1}} \right) \end{aligned} \quad (62)$$

已知 $p_r \geq p_{r-1} + 2$ 故得

$$\begin{aligned}
|N_B| &> \left(\frac{p_r p_{r-1} + 2p_r + p_r + 22}{210} \right) \left(\frac{260915200}{1062347 p_r p_{r-1}} \right) = \\
&\frac{260915200}{223092870} + \left(\frac{3p_r + 22}{210} \right) \left(\frac{260915200}{1062347 p_r p_{r-1}} \right) = \\
&1.169 + 1.169 \left(\frac{3p_r + 22}{p_r p_{r-1}} \right) \quad (63)
\end{aligned}$$

即得

$$|N_B| > 1.169 \quad (64)$$

9.1.2 通过子集 N_B 求解

从集合 N_B 中任取一元素 x_0 再引入参量,

$$x_6 = x_0 - 6 \quad (65)$$

$$x_{12} = x_0 - 12 \quad (66)$$

由其定义可知

$$x_0 \in E, \quad x_0 > 1 \quad (67)$$

$$x_6 \in E, \quad x_6 > 1 \quad (68)$$

$$x_{12} \in E, \quad x_{12} > 1 \quad (69)$$

以集合 P 中各元素为模数, 求得同余式组:

$$x_0 \equiv x_{0i} \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$x_6 \equiv x_{6i} \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$x_{12} \equiv x_{12i} \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

由于 $x_0 \in N_B$, 根据筛选条件 (3), (4), (5), (6), (7),

(8), (9) 式可知

$$x_{0i} \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (70)$$

$$x_{0i} \not\equiv 6 \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (71)$$

$$x_{0i} \not\equiv 12 \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (72)$$

依据同余式的性质, 从 (65), (66) 式可得

$$x_{6i} \equiv x_{0i} - 6 \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (73)$$

$$x_{12i} \equiv x_{0i} - 12 \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (74)$$

由 (71) 和 (73) 式, 可知

$$x_{6i} \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (75)$$

由 (72) 和 (74) 式, 可知

$$x_{12i} \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (76)$$

根据第一章引理 3, 由 (67) 式和 (70) 式可知, x_0 为奇素数。

根据第一章引理 3, 由 (68) 式和 (75) 式可知, x_6 为奇素数。

根据第一章引理 3, 由 (69) 式和 (76) 式可知, x_{12} 为奇素数。

由 (65) 和 (66) 式可得,

$$x_0 - x_6 = 6, \quad x_6 - x_{12} = 6 \quad (77)$$

由此可见, x_0, x_6, x_{12} 构成奇素数等差级数, 再引入参量,

$$x_k = x_0 - k, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11 \quad (78)$$

以集合 P 中各元素为模数, 求得同余式组:

$$x_k \equiv x_{ki} \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$k \equiv k_i \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

依据同余式的性质, 由 (78) 式可得

$$x_{ki} \equiv x_{0i} - k_i \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (79)$$

$$k = 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11$$

当 $i = 1$ 时,

$$x_{k1} \equiv x_{01} - k_1 \pmod{p_1} \quad (80)$$

由于 $p_1 = 2$ ，对于部分 k 值应有下面的等式：

$$k_1 = 1, \quad k = 1, 3, 5, 7, 9, 11 \quad (81)$$

由筛选条件 (3) 式可知

$$x_{01} = 1 \quad (82)$$

由 (80), (81) 和 (82) 式可知

$$x_{k1} = 0, \quad k = 1, 3, 5, 7, 9, 11 \quad (83)$$

(83) 式表示， x_k ($k = 1, 3, 5, 7, 9, 11$) 为复合数。

当 $i = 2$ 时， $p_2 = 3$ ，

$$x_{k2} \equiv x_{02} - k_2 \pmod{p_2} \quad (84)$$

$$k_2 = 2, \quad k = 2, 8 \quad (85)$$

由筛选条件 (4) 式可知

$$x_{02} = 2 \quad (86)$$

由 (84), (85) 和 (86) 式可知

$$x_{k2} = 0, \quad k = 2, 8 \quad (87)$$

(87) 式表示， x_k ($k = 2, 8$) 为复合数。

当 $i = 3$ 时， $p_3 = 5$

$$x_{k3} \equiv x_{03} - k_3 \pmod{p_3} \quad (88)$$

$$k_3 = 4, \quad k = 4 \quad (89)$$

由筛选条件 (5) 式可知

$$x_{03} = 4 \quad (90)$$

由 (88), (89) 和 (90) 式可知

$$x_{k3} = 0, \quad k = 4 \quad (91)$$

(91) 式表示， x_k ($k = 4$) 为复合数。

当 $i = 4$ 时， $p_4 = 7$

$$x_{k4} \equiv x_{04} - k_4 \pmod{p_4} \quad (92)$$

$$k_4 = 3, \quad k = 10 \quad (93)$$

由筛选条件 (6) 式可知,

$$x_{04} = 3 \quad (94)$$

由 (92), (93) 和 (94) 式可知

$$x_{k4} = 0, \quad k = 10 \quad (95)$$

(95) 式表示, $x_k (k=10)$ 为复合数。

综上可知, 由 (83), (87), (91) 和 (95) 式决定了 $x_k (k=1,2,3,4,5,7,8,9,10,11)$ 全是复合数。由 (78) 式可知, 这 10 个复合数正是介于 x_0 和 x_6 之间及 x_6 和 x_{12} 之间的 10 个整数。所以 x_0, x_6, x_{12} 为三个相邻的素数, 结合 (77) 式得知: x_0, x_6, x_{12} 为三个相邻素数组成的等差级数,

由 (70), (75) 和 (76) 式可知, 这三个素数都大于 p_r 。根据定义, p_r 为不超过 $A^{1/2}$ 的最大素数, 故大于 p_r 的素数必定大于 $A^{1/2}$ 。

这样一来, 由 (64) 式可得出结论: 对于大于 23000 的正整数 A 而言, 在区间 $(A^{1/2}, A)$ 内至少有 2 组“三个相邻素数构成的等差级数”。

9.2 相邻三素数等差级数的无限性

根据前节的结论, 在区间 $(A^{1/2}, A)$ ($A > 23000$) 内至少有 2 组“三个相邻素数构成的等差级数”。同理, 在区间 (A, A^2) 内同样至少有 2 组“三个相邻素数构成的等差级数”, 在区间 (A^2, A^4) 内还至少有 2 组“三个相邻素数构成的等差级数”……依次类推, 当 A 的指数趋向无穷时, “三个相邻素数构成的等差级数”必定有无穷多组。

9.3 求解程序

下面是用 ASP 写的求解程序，包括输入界面和运算显示两个文件：

第一个文件（input.asp）：

```
<html>
<head>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=
gb2312">
<LINK href="/style.css" type=text/css rel=stylesheet>
<title>相邻等差三素数</title>
<script language="JavaScript" >
function suborno () {
    var a=form1.a.value;
    if (a=="||a==null) {
        alert ("请输入一个数字 (20000 以上)! ");
        return;
    }else if (parseInt (a) <20000) {
        alert ("输入的数字必须大于 20000! ");
        return;
    }form1.submit ();
}
</script>

</head>

<body bgcolor="#BFC0B6">
<p align="center"><font color="#FF0000" size="4"><strong>
相邻等差三素数求解程序</strong></font></p>
<p align="center">&nbsp;</p>
```



```
<head>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=gb2312">
<LINK href="/style.css" type=text/css rel=stylesheet>
<title>相邻等差三素数</title>
</head>
<body bgcolor="#BFC0B6"><br>&nbsp;<br>&nbsp;<br>&nbsp;<br>&nbsp;
<div align="center" id="wait_div"><font color="#FF0000" size=
"4"><strong>如果出现提示“.....是否取消该脚本？”，请点击
“否”，请耐心等待！</strong></font></div>
<div align="center" id="wait2_div" style="display:none"><font
color="#FF0000" size="5"><strong>相邻等差三素数求解运算结
果</strong></font></div>
<p><script language="JavaScript">
var a, i,pi,j,flag,ni,n,m,x,y,k,pr,ther,num1,num2,num3;
//var array_ni = new Array ( ) ;
var array_pi = new Array ( ) ;
//var array_pi2 = new Array ( ) ;
var array_a = new Array ( ) ;
//var array_ai = new Array ( ) ;
//var array_hi = new Array ( ) ;
//var array_pi_ni = new Array ( )
//a=clng (request.form ("a"))
num1=0;
num2=0;
num3=0;
a=parseInt ("<%=a%>") ;
if (a<20000)
{
    document.write ("输入错误！") ;
```

```
}else{
document.write("<font color=#FF0000 size='4'>输入的数 a 为:
</font><font color=#8000FF size=4>" + a + "</font><br>");
//n=parseInt (a/2);
//alert (n);
pr=Math.sqrt (a);
pr=parseInt (pr);
//i=0
var i1=1;
//var i2=1;
ther=0;
i=0
//alert (pr);
for (pi=2;pi<=pr;pi++)
{
    //alert (array_pi[i]);
    flag=1;
    for (j=2;j<= (pi/2);j++)
    {
        if (pi%j==0)
        {
            flag=0;
            break;
        }
    }
    if (flag==1)
    {
        //ni=n%pi;
        //array_ni[i]=ni;
        array_pi[i]=pi;
```



```

        //array_pi2[i]=pi;
        //array_ai[i]=a%pi;
        //array_pi_ni[i]=pi-ni
        //if (i<6)
        //alert (array_pi[i]) ;
        //document.write (array_pi[i]+"&nbsp;");
        i++;
    }
}
//document.write ("<br>");
//alert (array_pi[i-1]) ;
ther=i;
//alert (a-array_pi[ther-1]) ;

for (i= (array_pi[ther-1]+1) ,j=0;i<=a;i++,j++) {
    array_a[j]=i;
    //if (i<450)
    //alert (array_a[i]) ;
    //document.write (array_a[i]+"&nbsp;");
    //alert (array_n[i]) ;
}
//alert (array_a.length) ;
//document.write ("<br>");
theflag=0;
for (i=0;i<array_a.length;i++)
{
    theflag=0;
    if ( ( array_a[i]%array_pi[0]==1 ) &&
        (array_a[i]%array_pi[1]==2) && (array_a[i]%array_pi[2]==4)
        && (array_a[i]%array_pi[3]==3)) {

```

```

        //alert (    array_pi[0]+"    "+array_pi[1]+"
"+array_pi[2]+" "+array_pi[3]) ;
        //alert (array_a[i]) ;
        theflag=1;
    }
    if (theflag==1) {
        for (k=4;k<array_pi.length;k++) {
            if ( (    array_a[i]%array_pi[k]==0 ) ||
( array_a[i]%array_pi[k]==6 ) || ( ( array_a[i]%array_pi[k] ) ==
(12%array_pi[k])) ) {
                array_a[i]=0;
                break;
            }
        }
    }else{
        array_a[i]=0;
    }
}
x=0;
for (i=0;i<array_a.length;i++) {
    if (array_a[i]>0) {
        //document.write (array_a[i]+"&nbsp;");
        x++;
    }
    //alert (array_n[i]) ;
}

```

document.write("
从集合 N 中求得的相邻等差三素数的组数为: " + x + "
");

```
if (x>0) {  
    document.write("<font color=#0000FF size=3>从集合 N  
中求得的相邻等差三素数为: </font><br>");  
    var astr=new String (a);  
    var thelength=astr.length;  
    var x11,x22,x33;  
    m=1;  
    for (i=0;i<array_a.length;i++)  
    {  
        switch (array_a[i])  
        {  
            case 0: break;  
            default:  
                x1=array_a[i];  
                x2=array_a[i]-6;  
                x3=array_a[i]-12;  
  
                x11=new String (x1);  
                for (var iii=x11.length;iii<thelength;iii++) {  
                    x11="0"+" "+x11;  
                }  
                x22=new String (x2);  
                for (var iii=x22.length;iii<thelength;iii++) {  
                    x22="0"+" "+x22;  
                }  
                x33=new String (x3);  
                for (var iii=x33.length;iii<thelength;iii++) {  
                    x33="0"+" "+x33;  
                }  
            }  
        }  
    }
```


$x_1=07817$ $x_2=07823$ $x_3=07829$

$x_1=12647$ $x_2=12653$ $x_3=12659$

$x_1=14537$ $x_2=14543$ $x_3=14549$

$x_1=14747$ $x_2=14753$ $x_3=14759$

$x_1=15797$ $x_2=15803$ $x_3=15809$

$x_1=16217$ $x_2=16223$ $x_3=16229$

$x_1=17477$ $x_2=17483$ $x_3=17489$

输入的数 a 为: 100000

从集合 N 中求得的相邻等差三素数的组数为: 29

从集合 N 中求得的相邻等差三素数为:

$x_1=001097$ $x_2=001103$ $x_3=001109$

$x_1=005297$ $x_2=005303$ $x_3=005309$

$x_1=007817$ $x_2=007823$ $x_3=007829$

$x_1=012647$ $x_2=012653$ $x_3=012659$

$x_1=014537$ $x_2=014543$ $x_3=014549$

$x_1=014747$ $x_2=014753$ $x_3=014759$

$x_1=015797$ $x_2=015803$ $x_3=015809$

$x_1=016217$ $x_2=016223$ $x_3=016229$

$x_1=017477$ $x_2=017483$ $x_3=017489$

$x_1=024407$ $x_2=024413$ $x_3=024419$

$x_1=025457$ $x_2=025463$ $x_3=025469$

$x_1=025667$ $x_2=025673$ $x_3=025679$

$x_1=026717$ $x_2=026723$ $x_3=026729$

$x_1=027767$ $x_2=027773$ $x_3=027779$

$x_1=029867$ $x_2=029873$ $x_3=029879$

$x_1=035747$ $x_2=035753$ $x_3=035759$

$x_1=039107$ $x_2=039113$ $x_3=039119$

$x_1=042677$ $x_2=042683$ $x_3=042689$

$x_1=047297$ $x_2=047303$ $x_3=047309$

$x_1=054437$ $x_2=054443$ $x_3=054449$

$x_1=062207$ $x_2=062213$ $x_3=062219$
 $x_1=062627$ $x_2=062633$ $x_3=062639$
 $x_1=076907$ $x_2=076913$ $x_3=076919$
 $x_1=078167$ $x_2=078173$ $x_3=078179$
 $x_1=078797$ $x_2=078803$ $x_3=078809$
 $x_1=082787$ $x_2=082793$ $x_3=082799$
 $x_1=082997$ $x_2=083003$ $x_3=083009$
 $x_1=084047$ $x_2=084053$ $x_3=084059$
 $x_1=093077$ $x_2=093083$ $x_3=093089$

输入的数 a 为: 200000

从集合 N 中求得的相邻等差三素数的组数为: 58

从集合 N 中求得的相邻等差三素数为:

$x_1=001097$ $x_2=001103$ $x_3=001109$
 $x_1=005297$ $x_2=005303$ $x_3=005309$
 $x_1=007817$ $x_2=007823$ $x_3=007829$
 $x_1=012647$ $x_2=012653$ $x_3=012659$
 $x_1=014537$ $x_2=014543$ $x_3=014549$
 $x_1=014747$ $x_2=014753$ $x_3=014759$
 $x_1=015797$ $x_2=015803$ $x_3=015809$
 $x_1=016217$ $x_2=016223$ $x_3=016229$
 $x_1=017477$ $x_2=017483$ $x_3=017489$
 $x_1=024407$ $x_2=024413$ $x_3=024419$
 $x_1=025457$ $x_2=025463$ $x_3=025469$
 $x_1=025667$ $x_2=025673$ $x_3=025679$
 $x_1=026717$ $x_2=026723$ $x_3=026729$
 $x_1=027767$ $x_2=027773$ $x_3=027779$
 $x_1=029867$ $x_2=029873$ $x_3=029879$
 $x_1=035747$ $x_2=035753$ $x_3=035759$
 $x_1=039107$ $x_2=039113$ $x_3=039119$

x1=042677 x2=042683 x3=042689
x1=047297 x2=047303 x3=047309
x1=054437 x2=054443 x3=054449
x1=062207 x2=062213 x3=062219
x1=062627 x2=062633 x3=062639
x1=076907 x2=076913 x3=076919
x1=078167 x2=078173 x3=078179
x1=078797 x2=078803 x3=078809
x1=082787 x2=082793 x3=082799
x1=082997 x2=083003 x3=083009
x1=084047 x2=084053 x3=084059
x1=093077 x2=093083 x3=093089
x1=101267 x2=101273 x3=101279
x1=101477 x2=101483 x3=101489
x1=103997 x2=104003 x3=104009
x1=110927 x2=110933 x3=110939
x1=111767 x2=111773 x3=111779
x1=114077 x2=114083 x3=114089
x1=115757 x2=115763 x3=115769
x1=121007 x2=121013 x3=121019
x1=122267 x2=122273 x3=122279
x1=127727 x2=127733 x3=127739
x1=128147 x2=128153 x3=128159
x1=131927 x2=131933 x3=131939
x1=137387 x2=137393 x3=137399
x1=139697 x2=139703 x3=139709
x1=143477 x2=143483 x3=143489
x1=146837 x2=146843 x3=146849
x1=150197 x2=150203 x3=150209
x1=152717 x2=152723 x3=152729
x1=163847 x2=163853 x3=163859

$x_1=168887$ $x_2=168893$ $x_3=168899$

$x_1=169307$ $x_2=169313$ $x_3=169319$

$x_1=174137$ $x_2=174143$ $x_3=174149$

$x_1=179807$ $x_2=179813$ $x_3=179819$

$x_1=183377$ $x_2=183383$ $x_3=183389$

$x_1=185057$ $x_2=185063$ $x_3=185069$

$x_1=186107$ $x_2=186113$ $x_3=186119$

$x_1=187367$ $x_2=187373$ $x_3=187379$

$x_1=189467$ $x_2=189473$ $x_3=189479$

$x_1=194717$ $x_2=194723$ $x_3=194729$

第十章 相邻等差四素数

四个相邻素数构成的等差级数是否有无穷多组？是个尚待解决的问题。就此问题，讨论如下。

10.1 求解证明

设 A 为大于 500000 的正整数，将不超过 A 的全部正整数集合用 E 表示。

以埃氏筛法求得不超过 $A^{1/2}$ 的全部素数集合 P ，并将 P 中元素按数值大小顺序排列如下：

$$P = (p_1, p_2, \dots, p_r)$$

$$2 = p_1 < p_2 < \dots < p_r \leq A^{1/2} \quad (1)$$

将不超过 A 且大于 p_r 的全部正整数集合用 N 表示， $N = (p_r + 1, p_r + 2, \dots, A)$ 则基数 $|N|$ 为：

$$|N| = A - p_r \quad (2)$$

用筛选方法从集合 N 中分选出必要的子集。

给定筛选条件：

$$g \equiv 1 \pmod{p_1} \quad (3)$$

$$g \equiv 2 \pmod{p_2} \quad (4)$$

$$g \equiv 4 \pmod{p_3} \quad (5)$$

$$g \equiv 3 \pmod{p_4} \quad (6)$$

$$g \equiv 5 \pmod{p_5} \quad (7)$$

$$g \not\equiv 0 \pmod{p_i}, \quad i = 6, 7, \dots, r \quad (8)$$

$$g \not\equiv 6 \pmod{p_i}, \quad i = 6, 7, \dots, r \quad (9)$$

$$g \not\equiv 12 \pmod{p_i}, \quad i = 6, 7, \dots, r \quad (10)$$

$$g \not\equiv 18 \pmod{p_i}, \quad i = 6, 7, \dots, r \quad (11)$$

g 表示集合 N 中被选元素。

从集合 N 中将同时符合筛选条件 (3), (4), \dots , (11) 式的所有元素分选出来, 组成子集 N_B , 再来讨论子集 N_B 的基数 $|N_B|$ (筛函数)。

10.1.1 求证筛函数的下界

已知, 被筛集合 N 为自然数列集合, 模数集合 P 中元素为互不相同的素数, 根据第一章的相关公式 (61) 式可知, 基数 $|N_B|$ 的近似估算公式为

$$|N_B| = |N| \prod_{i=1}^r \left(\frac{\alpha_i}{p_i} \right) \quad (12)$$

根据第一章中给出的 (72) 式可知, 基数 $|N_B|$ 的下界计算公式为

$$|N_B| > |N| \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{p_i}{|N|} \right) \left(\frac{\alpha_i}{p_i} \right) \quad (13)$$

式中 α_i 为按照筛选条件所选取的模 p_i 的同余类子集的个数, 下面具体确定 α_i 的数值。

当 $i=1$ 时, 由 (3) 式可知, 只有模 p_1 的“1 同余类子集”符合筛选条件, 故得

$$\alpha_1 = 1 \quad (14)$$

当 $i=2$ 时, 由 (4) 式可知, 只有模 p_2 的“2 同余类子集”符合筛选条件, 故得

$$\alpha_2 = 1 \quad (15)$$

当 $i=3$ 时, 由 (5) 式可知, 只有模 p_3 的 “4 同余类子集” 符合筛选条件, 故得

$$\alpha_3 = 1 \quad (16)$$

当 $i=4$ 时, 由 (6) 式可知, 只有模 p_4 的 “3 同余类子集” 符合筛选条件, 故得

$$\alpha_4 = 1 \quad (17)$$

当 $i=5$ 时, 由 (7) 式可知, 只有模 p_5 的 “5 同余类子集” 符合筛选条件, 故得

$$\alpha_5 = 1 \quad (18)$$

当 $i>5$ 时, $p_i \geq p_6 = 13$

数组 0, 6, 12, 18 中元素每两两之间对所有 p_i ($i>5$) 皆不同余。所以, 筛选条件 (8), (9), (10), (11) 式对应于四个不同的同余类子集, 由此知, 集合 N 中模 p_i 的 “0 同余类子集” “6 同余类子集” “12 同余类子集” 和 “与 18 同余的同余类子集” 共四个同余类子集不符合筛选条件, 其余 (p_i-4) 个模 p_i 的同余类子集都能符合筛选条件, 故得

$$\alpha_i = p_i - 4, \quad i = 6, 7, \dots, r \quad (19)$$

将 (14), (15), ..., (19) 式代入 (12) 式, 可得

$$|N_B| = |N| \prod_{i=1}^5 \left(\frac{1}{p_i}\right) \prod_{j=6}^r \left(\frac{p_j-4}{p_j}\right) \quad (20)$$

将 (14), (15), ..., (19) 式代入 (13) 式, 可得

$$|N_B| > F_1 |N| \prod_{i=1}^5 \left(\frac{1}{p_i}\right) \prod_{j=6}^r \left(\frac{p_j-4}{p_j}\right) \quad (21)$$

$$F_1 = \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{p_i}{|N|}\right) > 1 - \frac{1}{|N|} \sum_{i=1}^r p_i \quad (22)$$

由第一章 (77) 式可以推得

$$\Pi(x) - \Pi\left(\frac{x}{2}\right) < \Pi\left(\frac{x}{2}\right) \quad (23)$$

由 (23) 式知, 数值越大的区域素数分布的密度越小, 故得

$$\sum_{i=1}^r p_i = 17 + \sum_{i=5}^r p_i < 17 + \left(\frac{1}{2}\right)(p_5 + p_r)\{\Pi(p_r) - 4\} \quad (24)$$

根据切比晓夫不等式可知

$$\Pi(p_r) < (6 \ln 2) \frac{p_r}{\ln p_r} \quad (25)$$

将 (25) 式代入 (24) 式, 可得

$$\sum_{i=1}^r p_i < 17 - 2(p_5 + p_r) + \frac{(6 \ln 2) p_r (p_5 + p_r)}{2 \ln p_r} \quad (26)$$

将 (26) 式代入 (22) 式, 得

$$F_1 > 1 + \frac{2(p_5 + p_r)}{|N|} - \left\{ \frac{17}{|N|} + \frac{2.08(p_5 + p_r)p_r}{|N| \ln p_r} \right\} \quad (27)$$

将 (27) 式代入 (21) 式, 得

$$|N_B| > F_2 \prod_{j=6}^r \left(\frac{p_j - 4}{p_j} \right) - F_3 \prod_{j=6}^r \left(\frac{p_j - 4}{p_j} \right) \quad (28)$$

$$F_2 = \frac{|N|}{2310} + \frac{2(p_5 + p_r)}{2310} \quad (29)$$

$$F_3 = \frac{17}{2310} + \frac{2.08(p_5 + p_r)p_r}{2310 \ln p_r} \quad (30)$$

将 F_2 作以下变换

$$F_2 = F_2 \{p_{49} / (p_{51} - 4)\} + 2F_2 / (p_{51} - 4) \quad (31)$$

$$F_2 = F_2 \{p_{50} / (p_{52} - 4)\} + 6F_2 / (p_{52} - 4) \quad (32)$$

$$F_2 = F_2 \{p_{51} / (p_{53} - 4)\} + 4F_2 / (p_{53} - 4) \quad (33)$$

$$F_2 = F_2 \{p_{52} / (p_{54} - 4)\} + 8F_2 / (p_{54} - 4) \quad (34)$$

$$F_2 = F_2 \{p_{53} / (p_{55} - 4)\} + 12F_2 / (p_{55} - 4) \quad (35)$$

$$F_2 = F_2 \{p_{54} / (p_{56} - 4)\} + 8F_2 / (p_{56} - 4) \quad (36)$$

$$F_2 = F_2 \{p_{55} / (p_{57} - 4)\} + 8F_2 / (p_{57} - 4) \quad (37)$$

$$F_2 = F_2 \{p_{56} / (p_{58} - 4)\} + 4F_2 / (p_{58} - 4) \quad (38)$$

$$F_2 = F_2 \{p_{57} / (p_{59} - 4)\} + 4F_2 / (p_{59} - 4) \quad (39)$$

$$F_2 = F_2 \{p_{58} / (p_{60} - 4)\} + 6F_2 / (p_{60} - 4) \quad (40)$$

$$F_2 = F_2 \{p_{59} / (p_{61} - 4)\} + 2F_2 / (p_{61} - 4) \quad (41)$$

$$F_2 = F_2 \{p_{60} / (p_{62} - 4)\} + 8F_2 / (p_{62} - 4) \quad (42)$$

$$F_2 = F_2 \{p_{61} / (p_{63} - 4)\} + 20F_2 / (p_{63} - 4) \quad (43)$$

$$F_2 = F_2 \{p_{62} / (p_{64} - 4)\} + 14F_2 / (p_{64} - 4) \quad (44)$$

$$F_2 = F_2 \{p_{63} / (p_{65} - 4)\} + 2F_2 / (p_{65} - 4) \quad (45)$$

将 (31) ~ (45) 逐次代入右端第一项可得

$$F_2 = F_2 \prod_{i=51}^{65} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i - 4} \right) + F_4 \quad (46)$$

$$\begin{aligned} F_4 = & \left(\frac{2F_2}{p_{51} - 4} \right) \prod_{i=52}^{65} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i - 4} \right) + \left(\frac{6F_2}{p_{52} - 4} \right) \prod_{i=53}^{65} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i - 4} \right) + \\ & \left\{ \frac{4F_2}{p_{53} - 4} \right\} \prod_{i=54}^{65} \left\{ \frac{p_{i-2}}{p_i - 4} \right\} + \left\{ \frac{8F_2}{p_{54} - 4} \right\} \prod_{i=55}^{65} \left\{ \frac{p_{i-2}}{p_i - 4} \right\} + \\ & \left\{ \frac{12F_2}{p_{55} - 4} \right\} \prod_{i=56}^{65} \left\{ \frac{p_{i-2}}{p_i - 4} \right\} + \left\{ \frac{8F_2}{p_{56} - 4} \right\} \prod_{i=57}^{65} \left\{ \frac{p_{i-2}}{p_i - 4} \right\} + \\ & \left\{ \frac{8F_2}{p_{57} - 4} \right\} \prod_{i=58}^{65} \left\{ \frac{p_{i-2}}{p_i - 4} \right\} + \left\{ \frac{4F_2}{p_{58} - 4} \right\} \prod_{i=59}^{65} \left\{ \frac{p_{i-2}}{p_i - 4} \right\} + \\ & \left\{ \frac{4F_2}{p_{59} - 4} \right\} \prod_{i=60}^{65} \left\{ \frac{p_{i-2}}{p_i - 4} \right\} + \left\{ \frac{6F_2}{p_{60} - 4} \right\} \prod_{i=61}^{65} \left\{ \frac{p_{i-2}}{p_i - 4} \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{2F_2}{p_{61}-4} \right\} \prod_{i=62}^{65} \left\{ \frac{p_{i-2}}{p_i-4} \right\} + \left\{ \frac{8F_2}{p_{62}-4} \right\} \prod_{i=63}^{65} \left\{ \frac{p_{i-2}}{p_i-4} \right\} + \\
& \left\{ \frac{20F_2}{p_{63}-4} \right\} \prod_{i=64}^{65} \left\{ \frac{p_{i-2}}{p_i-4} \right\} + \\
& \left\{ \frac{14F_2}{p_{64}-4} \right\} \left\{ \frac{p_{63}}{p_{65}-4} \right\} + \left\{ \frac{2F_2}{p_{65}-4} \right\} \quad (47)
\end{aligned}$$

将 $p_{50} = 229$, $p_{51} = 233$, $p_{52} = 239$, $p_{53} = 241$, $p_{54} = 251$,
 $p_{55} = 257$, $p_{56} = 263$, $p_{57} = 269$, $p_{58} = 271$, $p_{59} = 277$,
 $p_{60} = 281$, $p_{61} = 283$, $p_{62} = 293$, $p_{63} = 307$, $p_{64} = 311$,
 $p_{65} = 313$, 代入 (47) 式, 可得

$$F_4 = 0.332F_2 \quad (48)$$

将 (48) 代入 (46) 式, 得

$$F_2 = F_2 \prod_{i=51}^{65} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i-4} \right) + 0.332F_2 \quad (49)$$

将 (49) 代入 (28) 式, 可得

$$|N_B| > F_2 \prod_{i=51}^{65} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i-4} \right) \prod_{j=6}^r \left(\frac{p_j-4}{p_j} \right) + F_5 \prod_{j=6}^r \left(\frac{p_j-4}{p_j} \right) \quad (50)$$

$$\begin{aligned}
F_5 &= 0.332F_2 - F_3 = \frac{0.332|N|}{2310} + \frac{0.664(p_5 + p_r)}{2310} - \\
& \frac{17}{2310} - \frac{2.08(p_5 + p_r)p_r}{2310 \ln p_r} \quad (51)
\end{aligned}$$

由 (1) 式和 (2) 式知

$$|N| \geq p_r^2 - p_r \quad (52)$$

将 (52) 式代入 (51) 式, 得

$$F_5 \geq F_6 p_r - 0.0042 \quad (53)$$

$$F_6 = \frac{0.332(p_r - 1)}{2310} + \frac{0.664}{2310} - \frac{2.08(p_5 + p_r)}{2310 \ln p_r} =$$

$$\frac{0.332}{2310} + \frac{0.332 p_r}{2310} - \frac{2.08(p_5 + p_r)}{2310 \ln p_r} \quad (54)$$

$$\frac{dF_6}{dp_r} = \frac{0.332}{2310} - \left(\frac{2.08}{2310}\right) \left\{ \frac{\ln p_r - (p_5 + p_r)(1/p_r)}{\ln^2 p_r} \right\} =$$

$$\frac{0.332}{2310} - \frac{2.08}{2310 \ln p_r} + \frac{2.08(p_5 + p_r)}{2310 p_r \ln^2 p_r} >$$

$$\frac{0.332}{2310} - \frac{2.08}{2310 \ln p_r} \quad (55)$$

$$\text{令 } \frac{0.332}{2310} - \frac{2.08}{2310 \ln p_r} > 0$$

$$\text{得 } p_r > 525.8 \quad (56)$$

将条件 (56) 式代入 (55) 式, 可得

$$\frac{dF_6}{dp_r} > 0 \quad p_r > 525.8 \quad (57)$$

由 (57) 式知, 当 $p_r > 525.8$ 时, F_6 为 p_r 的递增函数,

当 $A \geq 500000$ 时, $p_r \geq 701 > 525.8$

而且, $F_6(p_r = 701) = 0.003035$

$$\text{故知, } F_6 \geq 0.003035, \quad (A \geq 500000) \quad (58)$$

将 (58) 代入 (53) 式, 得

$$F_5 \geq 0.003035 \times 701 - 0.0042$$

$$= 2.123 \quad (A \geq 500000) \quad (59)$$

将 (59) 代入 (50) 式, 得

$$|N_B| > F_2 \prod_{i=51}^{65} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i - 4} \right) \prod_{j=6}^r \left(\frac{p_j - 4}{p_j} \right) \quad (60)$$

将 (29) 和 (52) 代入 (60) 式. 可得,

$$|N_B| > \left\{ \frac{p_r^2 - p_r}{2310} + \frac{2(p_5 + p_r)}{2310} \right\} \prod_{i=51}^{65} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i - 4} \right) \prod_{j=6}^r \left(\frac{p_j - 4}{p_j} \right) \quad (61)$$

$$\text{已知, } p_j - 4 \geq p_{j-2} \quad j > 65 \quad (62)$$

(62) 式代入 (61) 式, 得

$$\begin{aligned} |N_B| &> \left\{ \frac{p_r^2 - p_r}{2310} + \frac{2(p_5 + p_r)}{2310} \right\} \prod_{j=6}^{50} \left(\frac{p_j - 4}{p_j} \right) \prod_{i=51}^r \left(\frac{p_{i-2}}{p_i} \right) = \\ &= \left\{ \frac{p_r^2}{2310} + \frac{22 + p_r}{2310} \right\} \left\{ \prod_{j=6}^{48} \left(\frac{p_j - 4}{p_j} \right) \right\} \left\{ \frac{(p_{49} - 4)(p_{50} - 4)}{p_{r-1} p_r} \right\} = \\ &= \left\{ \frac{p_r^2 + p_r + 22}{p_{r-1} p_r} \right\} \left\{ \frac{(p_{49} - 4)(p_{50} - 4)}{2310} \right\} \prod_{j=6}^{48} \left(\frac{p_j - 4}{p_j} \right) > \\ &= \left\{ \frac{(p_{49} - 4)(p_{50} - 4)}{2310} \right\} \prod_{j=6}^{48} \left(\frac{p_j - 4}{p_j} \right) \end{aligned} \quad (63)$$

将 p_6, p_7, \dots, p_{50} 的数值代入 (63) 式, 可得

$$|N_B| > 1.118 \quad (64)$$

10.1.2 通过子集 N_B 求解

从集合 N_B 中任取一个元素 x_0 , 再引入参量:

$$x_6 = x_0 - 6 \quad (65)$$

$$x_{12} = x_0 - 12 \quad (66)$$

$$x_{18} = x_0 - 18 \quad (67)$$

由其定义可知

$$x_0 \in E, \quad x_0 > 1 \quad (68)$$

$$x_6 \in E, \quad x_6 > 1 \quad (69)$$

$$x_{12} \in E, \quad x_{12} > 1 \quad (70)$$

$$x_{18} \in E, \quad x_{18} > 1 \quad (71)$$

以集合 P 中各元素为模数, 求得同余式组,

$$x_0 \equiv x_{0i} \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (72)$$

$$x_6 \equiv x_{6i} \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (73)$$

$$x_{12} \equiv x_{12i} \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (74)$$

$$x_{18} \equiv x_{18i} \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (75)$$

由于 $x_0 \in N_B$ 根据筛选条件 (3), (4) \cdots (11) 式可知

$$x_{0i} \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (76)$$

$$x_{0i} \not\equiv 6 \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (77)$$

$$x_{0i} \not\equiv 12 \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (78)$$

$$x_{0i} \not\equiv 18 \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (79)$$

依据同余式的性质, 由 (65), (66), (67) 式可得

$$x_{6i} \equiv x_{0i} - 6 \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (80)$$

$$x_{12i} \equiv x_{0i} - 12 \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (81)$$

$$x_{18i} \equiv x_{0i} - 18 \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (82)$$

由 (77) 和 (80) 式, 可知

$$x_{6i} \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (83)$$

由 (78) 和 (81) 式, 可知

$$x_{12i} \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (84)$$

由 (79) 和 (82) 式, 可知

$$x_{18i} \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (85)$$

根据第一章引理 3, 由 (68) 和 (76) 式可知, x_0 为奇素数

根据第一章引理 3, 由 (69) 和 (83) 式可知, x_6 为奇素数

根据第一章引理 3, 由 (70) 和 (84) 式可知, x_{12} 为奇素数

根据第一章引理 3, 由 (71) 和 (85) 式可知, x_{18} 为奇素数

由 (65), (66) 和 (67) 式, 可得

$$x_0 - x_6 = 6 \quad (86)$$

$$x_6 - x_{12} = 6 \quad (87)$$

$$x_{12} - x_{18} = 6 \quad (88)$$

可见, x_0, x_6, x_{12}, x_{18} 构成奇素数等差级数。再引入参量: $x_k = x_0 - k, k = 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17$ (89)

以集合 P 中各元素为模数, 求得同余式组:

$$x_k \equiv x_{ki} \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$k \equiv k_i \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

依据同余式的性质, 由 (89) 式可知

$$x_{ki} \equiv x_{0i} - k_i \pmod{p_i} \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (90)$$

$$k = 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17$$

当 $i = 1$ 时, $p_1 = 2$

$$x_{k1} \equiv x_{01} - k_1 \pmod{p_1} \quad (91)$$

$$k_1 = 1, \quad k = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 \quad (92)$$

由筛选条件 (3) 式可知

$$x_{01} = 1 \quad (93)$$

由 (91), (92) 和 (93) 式可知

$$x_{k1} = 0, \quad k = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 \quad (94)$$

(94) 式表示, $x_k (k = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17)$ 为复合数。

当 $i = 2$ 时, $p_2 = 3$

$$x_{k2} \equiv x_{02} - k_2 \pmod{p_2} \quad (95)$$

$$k_2 = 2, \quad k = 2, 8, 14 \quad (96)$$

由筛选条件 (4) 式可知

$$x_{02} = 2 \quad (97)$$

由 (95), (96) 和 (97) 式可知

$$x_{k2} = 0, \quad k = 2, 8, 14 \quad (98)$$

(98) 式表示, x_k ($k = 2, 8, 14$) 为复合数。

当 $i = 3$ 时, $p_3 = 5$

$$x_{k3} \equiv x_{03} - k_3 \pmod{p_3} \quad (99)$$

$$k_3 = 4, \quad k = 4 \quad (100)$$

由筛选条件 (5) 式可知

$$x_{03} = 4 \quad (101)$$

由 (99), (100) 和 (101) 式可知

$$x_{k3} = 0, \quad k = 4 \quad (102)$$

(102) 式表示, x_k ($k = 4$) 为复合数。

当 $i = 4$ 时, $p_4 = 7$

$$x_{k4} \equiv x_{04} - k_4 \pmod{p_4} \quad (103)$$

$$k_4 = 3, \quad k = 10 \quad (104)$$

由筛选条件 (6) 式可知

$$x_{04} = 3 \quad (105)$$

由 (103), (104) 和 (105) 式可知

$$x_{k4} = 0, \quad k = 10 \quad (106)$$

(106) 式表示, x_k ($k = 10$) 为复合数。

当 $i = 5$ 时, $p_5 = 11$

$$x_{k5} \equiv x_{05} - k_5 \pmod{p_5} \quad (107)$$

$$k_5 = 5, \quad k = 16 \quad (108)$$

由筛选条件 (7) 式可知

$$x_{05} = 5 \quad (109)$$

由 (107), (108) 和 (109) 式可知

$$x_{k5} = 0, \quad k = 16 \quad (110)$$

(110) 式表示, x_k ($k=16$) 为复合数。

综合 (94), (98), (102) (106) 和 (110) 式可知, 参量 x_k ($k=1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17$) 全是复合数。

由 (89) 式可知, 这 15 个复合数正是介于 x_0 和 x_6 和 x_{12} 和 x_{18} 之间的 15 个整数。所以 x_0, x_6, x_{12}, x_{18} 为四个相邻的素数, 结合 (86), (87), (88) 式可知

x_0, x_6, x_{12}, x_{18} 为四个相邻素数组成的等差级数。

由 (76), (83), (84), (85) 式可知, 这四个素数都大于 p_r , 根据定义, p_r 为不超过 $A^{1/2}$ 的最大素数, 故大于 p_r 的素数必定大于 $A^{1/2}$, 由此知这四个素数都大于 $A^{1/2}$ 。即是说, 根据 (64) 式可得如下结论:

在区间 $(A^{1/2}, A)$ ($A > 500000$) 内至少有一组“四个相邻素数构成的等差级数”。

10.2 相邻四素数等差级数的无限性

根据前节所得结论, 对于不小于 500000 的正整数 A 而言, 在区间 $(A^{1/2}, A)$ 内至少有一组“四个相邻素数构成的等差级数”。照此结论, 在区间 (A, A^2) 内同样至少有一组“四个相邻素数构成的等差级数”, 在区间 (A^2, A^4) 内也至少有一组“四个相邻素数构成的等差级数”……依次类推, 当 A 的指数趋向无穷时, “四个相邻素数构成的等差级数”必定有无穷多组。

10.3 求解程序

下面是用 ASP 写的求解程序, 包括输入界面和运算显示两

个文件:

第一个文件 (input.asp):

```
<html>
<head>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=
gb2312">
<LINK href="/style.css" type=text/css rel=stylesheet>
<title>相邻等差四素数</title>
<script language="JavaScript" >
function suborno ( ) {
var a=form1.a.value;
if (a=="'||a==null) {
    alert ("请输入一个数字 (100000 以上)! ");
    return;
} else if (parseInt (a) <100000) {
    alert ("输入的数字必须大于 100000! ");
    return;
} form1.submit ( );
}
</script>

</head>

<body bgcolor="#BFC0B6">
<p align="center"><font color="#FF0000" size="4"><strong>
相邻等差四素数求解程序</strong></font></p>
<p align="center">&nbsp;</p>
<p align="center">&nbsp;</p>
<p align="center">如果您输入的数较大, 计算时间将会较
长, 请耐心等待! </p>
```

[illegible]

第二个文件 (sievejs.asp):

```
<%a=clng (request.form ("a"))
%>
<html>
<head>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html;
charset=gb2312">
<LINK href="/style.css" type=text/css rel=stylesheet>
```

```

<title>相邻等差四素数</title>
</head>
<body bgcolor="#BFC0B6"><br>&nbsp;<br>&nbsp;<br>&nbsp;<br>&nbsp;
  <div align="center" id="wait_div"><font color="#FF0000"
size="4"><strong>如果出现提示“.....是否取消该脚本? ”, 请点击
“否”, 请耐心等待! </strong></font></div>
  <div align="center" id="wait2_div" style="display:none"><font
color="#FF0000" size="5"><strong>相邻等差四素数求解运算结果
</strong></font></div>
  <p><script language="JavaScript">
var a, i,pi,j,flag,ni,n,m,x,y,k,pr,ther,num1,num2,num3;
//var array_ni = new Array ( );
var array_pi = new Array ( );
//var array_pi2 = new Array ( );
var array_a = new Array ( );
//var array_ai = new Array ( );
//var array_hi = new Array ( );
//var array_pi_ni = new Array ( )
//a=clng (request.form ("a"))
num1=0;
num2=0;
num3=0;
a=parseInt ("<%=a%>");
if (a<20000)
{
  document.write ("输入错误! ");
}else{
  document.write("<font color=#FF0000 size='4'>输入的数a为:
</font><font color=#8000FF size=4>" + a + "</font><br>");

```

```
//n=parseInt (a/2) ;
//alert (n) ;
pr=Math.sqrt (a) ;
pr=parseInt (pr) ;
//i=0
var i1=1;
//var i2=1;
ther=0;
i=0
//alert (pr) ;
for (pi=2;pi<=pr;pi++)
{
    //alert (array_pi[i]) ;
    flag=1;
    for (j=2;j<= (pi/2) ;j++)
    {
        if (pi%j==0)
        {
            flag=0;
            break;
        }
    }
    if (flag==1)
    {
        //ni=n%pi;
        //array_ni[i]=ni;
        array_pi[i]=pi;
        //array_pi2[i]=pi;
        //array_ai[i]=a%pi;
        //array_pi_ni[i]=pi-ni
        //if (i<6)
```



```

        //alert (array_pi[i]) ;
        //document.write (array_pi[i]+"&nbsp;");
        i++;
    }
}
//document.write ("<br>");
//alert (array_pi[i-1]) ;
ther=i;
//alert (a-array_pi[ther-1]) ;

for (i= (array_pi[ther-1]+1) ,j=0;i<=a;i++,j++) {
    array_a[j]=i;
    //if (i<450)
    //alert (array_a[i]) ;
    //document.write (array_a[i]+"&nbsp;");
    //alert (array_n[i]) ;
} //alert (array_a.length) ;
//document.write ("<br>");
theflag=0;
for (i=0;i<array_a.length;i++)
{
    theflag=0;
    if ( ( array_a[i]%array_pi[0]==1 )    &&
        (array_a[i]%array_pi[1]==2) && (array_a[i]%array_pi[2]==4)
        &&(array_a[i]%array_pi[3]==3)&&(array_a[i]%array_pi[4]==5))
    {
        //alert ( array_pi[0]+" "+array_pi[1]+" "+array_pi[2]+"
        "+array_pi[3]) ;
    }
}

```

```

        //alert (array_a[i]) ;
        theflag=1;
    }
    if (theflag==1) {
        for (k=5;k<array_pi.length;k++) {
            if ( ( array_a[i]%array_pi[k]==0 ) ||
                ( array_a[i]%array_pi[k]==6 ) || ( ( array_a[i]%array_pi[k] ) ==
                ( 12%array_pi[k] ) ) || ( ( array_a[i]%array_pi[k] ) ==
                ( 18%array_pi[k] ) ) ) ) {
                array_a[i]=0;
                break;
            }
        }
    }
    }else{
        array_a[i]=0;
    }
}
}
x=0;
for (i=0;i<array_a.length;i++) {
    if (array_a[i]>0) {
        //document.write (array_a[i]+"&nbsp;");
        x++;
    }
    //alert (array_n[i]) ;
}

```

document.write ("
从集合 N
中求得的相邻等差四素数的组数为: " + x + "
");

```
if (x>0) {
```

document.write("从集合 N 中求得
的相邻等差四素数为:
");

```
var astr=new String (a);
var thelength=astr.length;
var x11,x22,x33,x44;
m=1;
for (i=0;i<array_a.length;i++)
{
    switch (array_a[i])
    {
        case 0: break;
        default:
            x1=array_a[i];
            x2=array_a[i]-6;
            x3=array_a[i]-12;
            x4=array_a[i]-18;
            x11=new String (x1);
            for (var iii=x11.length;iii<thelength;iii++) {
                x11="0"+" "+x11;
            }
            x22=new String (x2);
            for (var iii=x22.length;iii<thelength;iii++) {
                x22="0"+" "+x22;
            }
            x33=new String (x3);
            for (var iii=x33.length;iii<thelength;iii++) {
                x33="0"+" "+x33;
            }
            x44=new String (x4);
            for (var iii=x44.length;iii<thelength;iii++) {
```

```
x44="0"+""+x44;
    }
        document.write      ("<font
size='4'>x</font>1="+x44+"&nbsp;&nbsp;<font
size='4'>x</font>2="+x33+"&nbsp;&nbsp;<font
size='4'>x</font>3="+x22+"&nbsp;&nbsp;<font
size='4'>x</font>4="+x11+"; &nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;)";
            if (m%2==0)
                {
                    document.write("<br>");
                }
            m=m+1;
        }
    }
}
}
```

```
document.all("wait_div").style.display="none";
document.all("wait2_div").style.display="";
}
</script>
</p></body>
</html>
```

10.4 实筛数据

输入的数 a 为: 100000

从集合 N 中求得的相邻等差四素数的组数为: 1

从集合 N 中求得的相邻等差四素数为

$x_1=078791$ $x_2=078797$ $x_3=078803$ $x_4=078809$

输入的数 a 为: 150000

从集合 N 中求得的相邻等差四素数的组数为: 2

从集合 N 中求得的相邻等差四素数为

$x_1=078791$ $x_2=078797$ $x_3=078803$ $x_4=078809$

$x_1=115751$ $x_2=115757$ $x_3=115763$ $x_4=115769$

输入的数 a 为: 200000

从集合 N 中求得的相邻等差四素数的组数为: 4

从集合 N 中求得的相邻等差四素数为

$x_1=078791$ $x_2=078797$ $x_3=078803$ $x_4=078809$

$x_1=115751$ $x_2=115757$ $x_3=115763$ $x_4=115769$

$x_1=185051$ $x_2=185057$ $x_3=185063$ $x_4=185069$

$x_1=187361$ $x_2=187367$ $x_3=187373$ $x_4=187379$

第十一章 相邻等距三孪生素数

关于“相邻等距三孪生素数”是否有无穷多组的问题，将在本章中进行讨论。

11.1 求解证明

设 A 为大于 250000 的任意正整数，将不超过 A 的全部正整数集合用 E 表示。

以埃氏筛法求得不超过 $A^{1/2}$ 的全部素数集合 P ，并将集合 P 中元素按数值大小顺序排列如下：

$$P = (p_1, p_2, \dots, p_r)$$

$$2 = p_1 < p_2 < \dots < p_r \leq A^{1/2} \quad (1)$$

将不超过 A 且大于 p_r 的全部正整数集合用 N 表示， $N = (p_r + 1, p_r + 2, \dots, A)$ 则集合 N 的基数 $|N|$ 为

$$|N| = A - p_r \geq p_r^2 - p_r \quad (2)$$

用筛选方法从集合 N 中分选出必要的子集。

给定筛选条件：

$$g \equiv 1 \pmod{p_1} \quad (3)$$

$$g \equiv 1 \pmod{p_2} \quad (4)$$

$$g \equiv 3 \pmod{p_3} \quad (5)$$

$$g \equiv 6 \pmod{p_4} \quad (6)$$

$$g \not\equiv 0 \pmod{p_i}, \quad i = 5, 6, \dots, r \quad (7)$$

$$g \not\equiv 2 \pmod{p_i}, \quad i = 5, 6, \dots, r \quad (8)$$

$$g \not\equiv 12 \pmod{p_i}, \quad i = 5, 6, \dots, r \quad (9)$$

$$g \not\equiv 14 \pmod{p_i}, \quad i = 5, 6, \dots, r \quad (10)$$

$$g \not\equiv 24 \pmod{p_i}, \quad i = 5, 6, \dots, r \quad (11)$$

$$g \not\equiv 26 \pmod{p_i}, \quad i = 5, 6, \dots, r \quad (12)$$

g 表示集合 N 中被选元素。

从集合 N 中将同时符合 (3), (4), \dots , (12) 式条件的所有元素分选出来, 组成子集 N_B , 再来讨论子集 N_B 的基数 $|N_B|$ (筛函数)。

11.1.1 求证筛函数的下界

集合 N 为自然数列集合, 模数集合 P 中元素为互不相同的素数, 根据第一章的相关公式 (61) 式可知, 基数 $|N_B|$ 的近似估算公式为

$$|N_B| = |N| \prod_{i=1}^r \left(\frac{\alpha_i}{p_i} \right) \quad (13)$$

根据第一章的 (72) 式可知, 基数 $|N_B|$ 的下界计算公式为

$$|N_B| > |N| \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{p_i}{|N|} \right) \left(\frac{\alpha_i}{p_i} \right) \quad (14)$$

式中 α_i 为按照筛选条件所选取的模 p_i 的同余类子集的个数。下面具体确定 α_i 的数值。

根据 (3) 式可知, 按模数 p_1 , 集合 N 中只有模 p_1 的 “1 同余类子集” 符合筛选条件故得

$$\alpha_1 = 1 \quad (15)$$

根据 (4) 式可知, 按模数 p_2 , 集合 N 中只有模 p_2 的 “1 同余类子集” 符合筛选条件故得

$$\alpha_2 = 1 \quad (16)$$

根据 (5) 式可知, 按模数 p_3 , 集合 N 中只有模 p_3 的 “3

同余类子集”符合筛选条件故得

$$\alpha_3 = 1 \quad (17)$$

根据 (6) 式可知, 按模数 p_4 , 集合 N 中只有模 p_4 的 “6 同余类子集”符合筛选条件故得

$$\alpha_4 = 1 \quad (18)$$

当 $i=5$ 时, $p_5=11$

此时有 $24 \equiv 2 \pmod{p_5}$ 。数 0, 12, 14, 26 和 2 中每两两之间对模 p_5 皆不同余。根据 (7), (8), \dots , (12) 式可知, 按模 p_5 , 集合 N 中只有 (p_5-5) 个模 p_5 的同余类子集符合筛选条件故得

$$\alpha_5 = (p_5 - 5) \quad (19)$$

当 $i=6$ 时, $p_6=13$

此时有 $26 \equiv 0 \pmod{p_6}$ 。数组 0, 2, 12, 14, 24 中元素每两两之间对模 p_6 皆不同余。根据 (7), (8), \dots , (12) 式可知, 按模 p_6 , 集合 N 中只有 (p_6-5) 个模 p_6 的同余类子集符合筛选条件故得

$$\alpha_6 = (p_6 - 5) \quad (20)$$

当 $i > 6$ 时, $p_i \geq p_7 = 17$

数组 0, 2, 12, 14, 24, 26 中元素每两两之间对模 $p_i (i=7, 8, \dots, r)$ 皆不同余。根据 (7), (8), \dots , (12) 式可知, 按模 p_i , 集合 N 中只有 (p_i-6) 个模 p_i 的同余类子集符合筛选条件故得

$$\alpha_i = (p_i - 6) \quad i=7, 8, \dots, r \quad (21)$$

将 (15), (16), \dots , (21) 式代入 (13) 式得

$$|N_B| = |N| \left(\frac{1}{210} \right) \prod_{i=5}^6 \left(\frac{p_i - 5}{p_i} \right) \prod_{j=7}^r \left(\frac{p_j - 6}{p_j} \right) \quad (22)$$

将 (15), (16), \dots , (21) 式代入 (14) 式得

$$|N_B| > |N| F_1 \left(\frac{1}{210} \right) \prod_{i=5}^6 \left(\frac{p_i - 5}{p_i} \right) \prod_{j=7}^r \left(\frac{p_j - 6}{p_j} \right) \quad (23)$$

$$F_1 = \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{p_i}{|N|} \right) \quad (24)$$

由 (23) 式得

$$|N_B| > F_1 \left(\frac{8|N|}{5005} \right) \prod_{j=7}^{45} \left(\frac{p_j - 6}{p_j} \right) \prod_{i=46}^r \left(\frac{p_i - 6}{p_i} \right) \quad (25)$$

由 (24) 式得

$$F_1 = \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{p_i}{|N|} \right) > 1 - \frac{1}{|N|} \sum_{i=1}^r p_i \quad (26)$$

由第一章 (77) 式可以推得

$$\Pi(x) - \Pi\left(\frac{x}{2}\right) < \Pi\left(\frac{x}{2}\right) \quad (27)$$

(27) 式表明, 数值越大的区域素数分布的密度越小, 由此可得

$$\sum_{i=1}^r p_i < \left(\frac{1}{2}\right)(p_1 + p_r) \Pi(p_r) \quad (28)$$

由切比晓夫不等式可得

$$\Pi(p_r) < (6 \ln 2) \left(\frac{p_r}{\ln p_r} \right) \quad (29)$$

由 (28), (29) 式得

$$\sum_{i=1}^r p_i < \frac{(3 \ln 2)(p_1 + p_r)p_r}{\ln p_r} \quad (30)$$

将 (30) 式代入 (26) 式, 得

$$F_1 > 1 - \frac{(3 \ln 2)(p_1 + p_r)p_r}{|N| \ln p_r} \quad (31)$$

将 (31) 代入 (25) 式, 得

$$|N_B| > \left(\frac{8|N|}{5005} \right) \prod_{j=7}^{45} \left(\frac{p_j - 6}{p_j} \right) \prod_{i=46}^r \left(\frac{p_i - 6}{p_i} \right) - \\ \left(\frac{(24 \ln 2)(p_1 + p_r)p_r}{5005 \ln p_r} \right) \prod_{j=7}^{45} \left(\frac{p_j - 6}{p_j} \right) \prod_{i=46}^r \left(\frac{p_i - 6}{p_i} \right) \quad (32)$$

将 $|N|$ 作以下变换:

$$|N| = |N| \left(\frac{p_{44}}{p_{46} - 6} \right) \quad (33)$$

$$|N| = |N| \left(\frac{p_{45}}{p_{47} - 6} \right) + \frac{8|N|}{p_{47} - 6} \quad (34)$$

$$|N| = |N| \left(\frac{p_{46}}{p_{48} - 6} \right) + \frac{18|N|}{p_{48} - 6} \quad (35)$$

$$|N| = |N| \left(\frac{p_{47}}{p_{49} - 6} \right) + \frac{10|N|}{p_{49} - 6} \quad (36)$$

$$|N| = |N| \left(\frac{p_{48}}{p_{50} - 6} \right) \quad (37)$$

$$|N| = |N| \left(\frac{p_{49}}{p_{51} - 6} \right) \quad (38)$$

$$|N| = |N| \left(\frac{p_{50}}{p_{52} - 6} \right) + \frac{4|N|}{p_{52} - 6} \quad (39)$$

$$|N| = |N| \left(\frac{p_{51}}{p_{53} - 6} \right) + \frac{2|N|}{p_{53} - 6} \quad (40)$$

$$|N| = |N| \left(\frac{p_{52}}{p_{54} - 6} \right) + \frac{6|N|}{p_{54} - 6} \quad (41)$$

$$|N| = |N| \left(\frac{p_{53}}{p_{55} - 6} \right) + \frac{10|N|}{p_{55} - 6} \quad (42)$$

$$|N| = |N| \left(\frac{p_{54}}{p_{56} - 6} \right) + \frac{6|N|}{p_{56} - 6} \quad (43)$$

$$|N| = |N| \left(\frac{p_{55}}{p_{57} - 6} \right) + \frac{6|N|}{p_{57} - 6} \quad (44)$$

$$|N| = |N| \left(\frac{p_{56}}{p_{58} - 6} \right) + \frac{2|N|}{p_{58} - 6} \quad (45)$$

$$|N| = |N| \left(\frac{p_{57}}{p_{59} - 6} \right) + \frac{2|N|}{p_{59} - 6} \quad (46)$$

$$|N| = |N| \left(\frac{p_{58}}{p_{60} - 6} \right) + \frac{4|N|}{p_{60} - 6} \quad (47)$$

$$|N| = |N| \left(\frac{p_{59}}{p_{61} - 6} \right) \quad (48)$$

$$|N| = |N| \left(\frac{p_{60}}{p_{62} - 6} \right) + \frac{6|N|}{p_{62} - 6} \quad (49)$$

$$|N| = |N| \left(\frac{p_{61}}{p_{63} - 6} \right) + \frac{18|N|}{p_{63} - 6} \quad (50)$$

将 (33) ~ (50) 逐次代入右端第一项, 得

$$|N| = |N| \prod_{i=46}^{63} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i - 6} \right) + F_2 \quad (51)$$

其中 F_2 为

$$\begin{aligned} F_2 = & \left(\frac{8|N|}{p_{47} - 6} \right) \prod_{i=48}^{63} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i - 6} \right) + \left(\frac{18|N|}{p_{48} - 6} \right) \prod_{i=49}^{63} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i - 6} \right) + \\ & \left(\frac{10|N|}{p_{49} - 6} \right) \prod_{i=50}^{63} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i - 6} \right) + \left(\frac{4|N|}{p_{52} - 6} \right) \prod_{i=53}^{63} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i - 6} \right) + \\ & \left(\frac{2|N|}{p_{53} - 6} \right) \prod_{i=54}^{63} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i - 6} \right) + \left(\frac{6|N|}{p_{54} - 6} \right) \prod_{i=55}^{63} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i - 6} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{10|N|}{p_{55}-6}\right)\prod_{i=56}^{63}\left(\frac{p_{i-2}}{p_i-6}\right)+\left(\frac{6|N|}{p_{56}-6}\right)\prod_{i=57}^{63}\left(\frac{p_{i-2}}{p_i-6}\right)+ \\
& \left(\frac{6|N|}{p_{57}-6}\right)\prod_{i=58}^{63}\left(\frac{p_{i-2}}{p_i-6}\right)+\left(\frac{2|N|}{p_{58}-6}\right)\prod_{i=59}^{63}\left(\frac{p_{i-2}}{p_i-6}\right)+ \\
& \left(\frac{2|N|}{p_{59}-6}\right)\prod_{i=60}^{63}\left(\frac{p_{i-2}}{p_i-6}\right)+\left(\frac{4|N|}{p_{60}-6}\right)\prod_{i=61}^{63}\left(\frac{p_{i-2}}{p_i-6}\right)+ \\
& \left(\frac{6|N|}{p_{62}-6}\right)\left(\frac{p_{61}}{p_{63}-6}\right)+\frac{18|N|}{p_{63}-6} \quad (52)
\end{aligned}$$

将 $p_{46}=199$, $p_{47}=211$, $p_{48}=223$, $p_{49}=227$, $p_{50}=229$,
 $p_{51}=233$, $p_{52}=239$, $p_{53}=241$, $p_{54}=251$, $p_{55}=257$,
 $p_{56}=263$, $p_{57}=269$, $p_{58}=271$, $p_{59}=277$, $p_{60}=281$,
 $p_{61}=283$, $p_{62}=293$, $p_{63}=307$ 代入 (52) 式可得

$$F_2 = 0.345|N| \quad (53)$$

将 (53) 式代入 (51) 式, 得

$$|N| = |N|\prod_{i=46}^{63}\left(\frac{p_{i-2}}{p_i-6}\right) + 0.345|N| \quad (54)$$

将 (54) 式代入 (32) 式, 得

$$\begin{aligned}
|N_B| & > |N|\left(\frac{1.183}{p_{44}p_{45}}\right)\prod_{j=46}^{63}\left(\frac{p_{j-2}}{p_j-6}\right)\prod_{i=46}^r\frac{p_i-6}{p_i}+ \\
& |N|\left(\frac{0.4081}{p_{44}p_{45}}\right)\prod_{i=46}^r\left(\frac{p_i-6}{p_i}\right)- \\
& \left(\frac{(\ln 2)(p_1+p_r)p_r}{\ln p_r}\right)\left(\frac{3.549}{p_{44}p_{45}}\right)\prod_{i=46}^r\left(\frac{p_i-6}{p_i}\right) \quad (55)
\end{aligned}$$

$$\text{令 } F_3 = 0.4081|N| - \frac{3.549(\ln 2)(p_1+p_r)p_r}{\ln p_r} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} \text{得 } |N_B| &> |N| \left(\frac{1.183}{P_{44}P_{45}} \right) \prod_{j=46}^{63} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j} \right) \prod_{i=64}^r \left(\frac{p_i-6}{p_i} \right) + \\ &F_3 \left(\frac{1}{P_{44}P_{45}} \right) \prod_{i=46}^r \left(\frac{p_i-6}{p_i} \right) \end{aligned} \quad (57)$$

将 (2) 式代入 (56) 式, 得

$$F_3 \geq F_4 p_r \quad (58)$$

$$F_4 = 0.4081(p_r - 1) - \frac{3.549(\ln 2)(p_1 + p_r)}{\ln p_r} \quad (59)$$

$$\begin{aligned} \frac{dF_4}{dp_r} &= 0.4081 - 2.46 \left\{ \frac{\ln p_r - (p_1 + p_r)(1/p_r)}{\ln^2 p_r} \right\} = \\ &0.4081 - \frac{2.46}{\ln p_r} + \frac{2.46(p_1 + p_r)}{p_r \ln^2 p_r} > \\ &0.4081 - \frac{2.46}{\ln p_r} \end{aligned} \quad (60)$$

$$\begin{aligned} \text{令 } 0.4081 - \frac{2.46}{\ln p_r} &> 0 \\ \text{得 } p_r &> 414.9 \end{aligned} \quad (61)$$

将条件 (61) 代入 (60) 式得

$$\frac{dF_4}{dp_r} > 0 \quad p_r > 414.9 \quad (62)$$

(62) 式表示当 $p_r > 414.9$ 时, F_4 为 p_r 的递增函数。

当 $A \geq 250000$ 时, $p_r \geq 499 > 414.9$

而且 $F_4(p_r = 499) = 4.85$

故知, $F_4 \geq 4.85$ ($A \geq 250000$) (63)

将 (63) 式代入 (58) 式, 再将 (58) 代入 (57) 式得

$$|N_B| > |N| \left(\frac{1.183}{P_{44}P_{45}} \right) \prod_{j=46}^{63} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j} \right) \prod_{i=64}^r \left(\frac{p_i-6}{p_i} \right) \quad (64)$$

根据第一章中 (73) 式可知:

$$\Pi(p_i) = \frac{p_i}{\ln p_i - 1.08366} \quad (65)$$

$$\Pi(p_{i+1}) = \frac{p_{i+1}}{\ln p_{i+1} - 1.08366} \quad (66)$$

设在 p_i 处, 相邻素数的平均间距为 Δ_i 则得:

$$p_{i+1} = p_i + \Delta_i \quad (67)$$

(66) 和 (65) 式两端相减, 可得:

$$1 = \frac{p_i + \Delta_i}{\ln(p_i + \Delta_i) - 1.08366} - \frac{p_i}{\ln p_i - 1.08366}$$

通分移项可得

$$\begin{aligned} & \{\ln(p_i + \Delta_i) - 1.08366\} \{\ln p_i - 1.08366\} = \\ & (p_i + \Delta_i) \{\ln p_i - 1.08366\} - p_i \{\ln(p_i + \Delta_i) - 1.08366\} \end{aligned} \quad (68)$$

$$\text{已知, } \ln(p_i + \Delta_i) = \ln p_i + \ln\left(1 + \frac{\Delta_i}{p_i}\right) \quad (69)$$

将 (69) 式代入 (68) 式, 可得

$$\ln(p_i + \Delta_i) - 1.08366 = \Delta_i - \frac{p_i \ln\left(1 + \frac{\Delta_i}{p_i}\right)}{\ln p_i - 1.08366} \quad (70)$$

$$\text{由于 } \frac{p_i \ln\left(1 + \frac{\Delta_i}{p_i}\right)}{\ln p_i - 1.08366} > 0 \quad (p_i > 10) \quad (71)$$

$$\text{得 } \Delta_i > \ln p_{i+1} - 1.08366 \quad (72)$$

$$\text{令 } \ln p_{i+1} - 1.08366 > 3$$

$$\text{得 } p_{i+1} > 59.36 \quad (73)$$

将条件 (73) 式代入 (72) 式, 可得

$$\Delta_i > 3 \quad p_{i+1} > 59.36 \quad (74)$$

已知 $p_{62} = 293 > 59.36$

$$\text{故得 } \Delta_i > 3 \quad (i \geq 61) \quad (75)$$

$$\text{即有 } p_i - 6 \geq p_{i-2} \quad (i \geq 64) \quad (76)$$

将 (76) 代入 (64) 式, 可得

$$|N_B| > |N| \left(\frac{1.183}{p_{44} p_{45}} \right) \prod_{i=46}^r \left(\frac{p_{i-2}}{p_i} \right) \quad (77)$$

将 (2) 式代入 (77) 式, 得

$$|N_B| > (p_r^2 - p_r) \left(\frac{1.183}{p_{44} p_{45}} \right) \prod_{i=46}^r \left(\frac{p_{i-2}}{p_i} \right) \quad (78)$$

$$\text{由于 } p_r > p_{r-1} + 2 \quad (79)$$

$$\text{得 } |N_B| > (p_r p_{r-1} + p_r) \left(\frac{1.183}{p_r p_{r-1}} \right) > 1.183 \quad (80)$$

11.1.2 通过子集 N_B 求解

从子集 N_B 中任取一元素 x_0 , 再引入参量:

$$x_k = x_0 - 12k \quad (k = 0, 1, 2) \quad (81)$$

$$y_k = x_0 - 12k - 2 \quad (k = 0, 1, 2) \quad (82)$$

由其定义可知

$$x_k \in E, \quad x_k > 1 \quad (k = 0, 1, 2) \quad (83)$$

$$y_k \in E, \quad y_k > 1 \quad (k = 0, 1, 2) \quad (84)$$

以集合 P 中各元素为模数, 求得同余式组:

$$\begin{aligned} x_k &\equiv x_{ki} \pmod{p_i}, & i &= 1, 2, \dots, r \\ k &= 0, 1, 2 \end{aligned} \quad (85)$$

$$\begin{aligned} y_k &\equiv y_{ki} \pmod{p_i}, & i &= 1, 2, \dots, r \\ k &= 0, 1, 2 \end{aligned} \quad (86)$$

x_{ki} 和 y_{ki} 为非负的最小剩余。

由于 $x_0 \in N_B$, 根据筛选条件 (3) ~ (12) 式可知

$$x_{0i} \neq 0 \quad (87)$$

$$x_{0i} \neq 2 \quad (88)$$

$$x_{0i} \not\equiv 12k \pmod{p_i}, \quad i=1,2,\dots,r \quad (89)$$

$$k=1,2$$

$$x_{0i} \not\equiv 12k+2 \pmod{p_i}, \quad i=1,2,\dots,r \quad (90)$$

$$k=1,2$$

依据同余式的性质, 由 (81), (82) 式推得

$$y_{0i} \equiv x_{0i} - 2 \pmod{p_i}, \quad i=1,2,\dots,r \quad (91)$$

$$x_{ki} \equiv x_{0i} - 12k \pmod{p_i}, \quad i=1,2,\dots,r \quad (92)$$

$$k=1,2$$

$$y_{ki} \equiv x_{0i} - 12k - 2 \pmod{p_i}, \quad i=1,2,\dots,r \quad (93)$$

$$k=1,2$$

由 (88) 式和 (91) 式, 可知

$$y_{0i} \neq 0, \quad i=1,2,\dots,r \quad (94)$$

由 (89) 式和 (92) 式, 可知

$$x_{ki} \neq 0 \quad (k=1,2), \quad i=1,2,\dots,r \quad (95)$$

由 (90) 式和 (93) 式, 可知

$$y_{ki} \neq 0 \quad (k=1,2), \quad i=1,2,\dots,r \quad (96)$$

根据第一章引理 3:

由 (83) 式和 (87) 式可知, x_0 为奇素数。

由 (84) 式和 (94) 式可知, y_0 为奇素数。

由 (83) 式和 (95) 式可知, x_k ($k=1,2$) 为奇素数。

由 (84) 式和 (96) 式可知, y_k ($k=1,2$) 为奇素数。

当 $k=0$ 时, 由 (82) 式可得

$$x_0 - y_0 = 2 \quad (97)$$

当 $k=1$ 时, 由 (81) 式和 (82) 式可得

$$x_1 - y_1 = 2 \quad (98)$$

当 $k=2$ 时, 由 (81) 式和 (82) 式可得

$$x_2 - y_2 = 2 \quad (99)$$

可见, $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 为三对孪生素数。

同时从 (81) 式可得

$$x_0 - x_1 = 12, \quad x_1 - x_2 = 12 \quad (100)$$

由 (97), (98), (99), (100) 式可知: $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 为等距三孪生素数。

再引入参量:

$$z_k = x_0 - k \quad (k = 3, 4, \dots, 11, 15, 16, \dots, 23) \quad (101)$$

以集合 P 中各元素为模数, 求得同余式组:

$$z_k \equiv z_{ki} \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (102)$$

$$k \equiv k_i \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (103)$$

依据同余式的性质, 由 (101) 式推得

$$z_{ki} \equiv x_{0i} - k_i \pmod{p_i} \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (104)$$

$$k = 3, 4, \dots, 11, 15, 16, \dots, 23$$

当 $i=1$ 时, $p_1 = 2$, 由 (104) 式知

$$z_{k1} \equiv x_{01} - k_1 \pmod{p_1} \quad (105)$$

$$k_1 = 1, \quad k = 3, 5, 7, 9, 11, 15, 17, 19, 21, 23 \quad (106)$$

由筛选条件 (3) 式, 可知

$$x_{01} = 1 \quad (107)$$

由 (105), (106) 和 (107) 式, 可知

$$z_{k1} = 0, \quad k = 3, 5, 7, 9, 11, 15, 17, 19, 21, 23 \quad (108)$$

(108) 式表示, z_k ($k=3,5,7,9,11,15,17,19,21,23$) 为复合数。

当 $i=2$ 时, $p_2=3$, 由 (104) 式得

$$z_{k2} \equiv x_{02} - k_2 \pmod{p_2} \quad (109)$$

$$k_2=1, k=4,10,16,22 \quad (110)$$

由筛选条件 (4) 式, 可知

$$x_{02}=1 \quad (111)$$

从 (109), (110) 和 (111) 式, 得

$$z_{k2}=0, k=4,10,16,22 \quad (112)$$

(112) 式表示, z_k ($k=4,10,16,22$) 为复合数。

当 $i=3$ 时, $p_3=5$, 由 (104) 式得

$$z_{k3} \equiv x_{03} - k_3 \pmod{p_3} \quad (113)$$

$$k_3=3, k=8,18 \quad (114)$$

由筛选条件 (5) 式, 可知

$$x_{03}=3 \quad (115)$$

从 (113), (114) 和 (115) 式, 得

$$z_{k3}=0, k=8,18 \quad (116)$$

(116) 式表示, z_k ($k=8,18$) 为复合数。

当 $i=4$ 时, $p_4=7$, 由 (104) 式得

$$z_{k4} \equiv x_{04} - k_4 \pmod{p_4} \quad (117)$$

$$k_4=6, k=6,20 \quad (118)$$

由筛选条件 (6) 式可知

$$x_{04}=6 \quad (119)$$

从 (117), (118) 和 (119) 式, 得

$$z_{k4}=0, k=6,20 \quad (120)$$

(120) 式表示, z_k ($k=6,20$) 为复合数。

综上 (108), (112), (116) 和 (120) 式可知: z_k ($k=3,4,\dots,11,15,16,\dots,23$) 全是复合数。

由 (101) 式可知, 这 18 个复合数正是介于孪生素数 (x_0, y_0) , 和 (x_1, y_1) 之间以及孪生素数 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 之间的 18 个整数, 所以, 孪生素数 (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 为相邻的等距三孪生素数。

由 (87), (94), (95) 和 (96) 式可知, 这三对孪生素数都大于 p_r 。根据定义, p_r 为不超过 $A^{1/2}$ 的最大素数, 故大于 p_r 的素数必定大于 $A^{1/2}$, 由此知这三对孪生素数同时还大于 $A^{1/2}$ 。至此, 由 (80) 式可得如下结论: 在区间 $(A^{1/2}, A)$ ($A > 250000$) 内至少有一组“相邻等距三孪生素数”。

11.2 相邻等距三孪生素数的无限性

根据前一节得出的结论可知, 在区间 $(A^{1/2}, A)$ ($A > 250000$) 内至少有一组“相邻等距三孪生素数”, 同理在区间 (A, A^2) 内同样至少有一组“相邻等距三孪生素数”, 在区间 (A^2, A^4) 内亦至少有一组“相邻等距三孪生素数”……, 依次类推, 当 A 的指数趋向无穷时, “相邻等距三孪生素数”必定有无穷多组。

11.3 求解程序

下面是用 ASP 写的求解程序, 包括输入界面和运算显示两个文件:

第一个文件 (input.asp):

```
<html>
```

```
<head>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset
=gb2312">
<LINK href="/style.css" type=text/css rel=stylesheet>
<title>相邻等距三孪生素数</title>
<script language="JavaScript" >
function suborno ( ) {
    var a=form1.a.value;
    if (a=="")||a==null) {
        alert ("请输入一个数字 (100000 以上)! ");
        return;
    }else if (parseInt (a) <100000) {
        alert ("输入的数字必须大于 100000! ");
        return;
    }form1.submit ( ) ;
}
</script>

</head>

<body bgcolor="#BFC0B6">
<p align="center"><font color="#FF0000" size="4"><strong>
相邻等距三孪生素数求解程序</strong></font></p>
<p align="center">&nbsp;</p>
<p align="center">&nbsp;</p>
<p align="center">如果您输入的数较大, 计算时间将会较
长, 请耐心等待! </p>
<form name="form1" method="post" action="sievejs.asp">
    <table width="500" border="0" align="center" cellpadding
="5" cellspacing="0">
```



```
<body bgcolor="#BFC0B6"><br><div align="center" id="wait_div"><font color="#FF0000" size="4"><strong>如果出现提示“.....是否取消该脚本？”，请点击“否”，并请耐心等待！</strong></font></div>
```

相邻等距三李生素数求解运算结果

```
<p><script language="JavaScript">
var a, i, pi, j, flag, ni, n, m, x, y, k, pr, ther, num1, num2, num3;
//var array_ni = new Array ( ) ;
var array_pi = new Array ( ) ;
//var array_pi2 = new Array ( ) ;
var array_a = new Array ( ) ;
//var array_ai = new Array ( ) ;
//var array_hi = new Array ( ) ;
//var array_pi_ni = new Array ( )
//a=clng (request.form ("a"))
num1=0;
num2=0;
num3=0;
a=parseInt ("<0%=a%>") ;
if (a<100000)
{
    document.write ("输入错误！ ") ;
}
else{
    document.write ("<font color=#FF0000 size='4'>输入的数 a
为： </font><font color=#8000FF size=4>" + a + "</font><br>") ;
    //n=parseInt (a/2) ;
    //alert (n) ;

```

```
pr=Math.sqrt (a) ;
pr=parseInt (pr) ;
//i=0
var i1=1;
//var i2=1;
ther=0;
i=0
//alert (pr) ;
for (pi=2;pi<=pr;pi++)
{ //alert (array_pi[i]) ;
    flag=1;
    for (j=2;j<= (pi/2) ;j++)
    {
        if (pi%j==0)
        {
            flag=0;
            break;
        }
    }
}
if (flag==1)
{
    //ni=n%pi;
    //array_ni[i]=ni;
    array_pi[i]=pi;
    //array_pi2[i]=pi;
    //array_ai[i]=a%pi;
    //array_pi_ni[i]=pi-ni
    //if (i<6)
    //alert (array_pi[i]) ;
    //document.write (array_pi[i]+"&nbsp;");
}
```

```
        i++;
    }
}
//document.write ("<br>");
//alert (array_pi[i-1]);
ther=i;
//alert (a-array_pi[ther-1]);

for (i= (array_pi[ther-1]+1) ,j=0;i<=a;i++,j++) {
    array_a[j]=i;
    //if (i<450)
    //alert (array_a[i]);
    //document.write (array_a[i]+"&nbsp;");
    //alert (array_n[i]);
} //alert (array_a.length);
//document.write ("<br>");
theflag=0;
for (i=0;i<array_a.length;i++)
{
    theflag=0;
    if((array_a[i]%array_pi[0]==1)&&(array_a[i]%array_pi[1]==1)
    &&(array_a[i]%array_pi[2]==3) &&(array_a[i]%array_pi[3]==6)) {
        //alert (array_pi[0]+" "+array_pi[1]+" "+array_pi[2]+"
        "+array_pi[3]);
        //alert (array_a[i]);
        theflag=1;
    }
    if (theflag==1) {
        for (k=4;k<array_pi.length;k++) {
```



```

        if ((array_a[i]%array_pi[k]==0) || (array_a[i]%array_pi[k]==2) ||
            ((array_a[i]%array_pi[k]) == (12%array_pi[k])) || ((array_a[i]%array_pi[k]) ==
            (14%array_pi[k])) || ((array_a[i]%array_pi[k]) == (24%array_pi[k])) ||
            ((array_a[i]%array_pi[k]) == (26%array_pi[k])))) {
                array_a[i]=0;
                break;
        }
    }
} else {
    array_a[i]=0;
}
}
x=0;
for (i=0;i<array_a.length;i++) {
    if (array_a[i]>0) {
        //document.write (array_a[i]+"&nbsp;");
        x++;
    }
    //alert (array_n[i]);
}

```

document.write("
从集合 N 中求得的相邻等距三孪生素数的组数为: " + x + "
");

if (x>0) {

document.write("从集合 N 中求得的相邻等距三孪生素数为:
");

var astr=new String (a) ;

var thelength=astr.length;

var x11,x22,x33,x44,x55,x66;

m=1;

```
for (i=0;i<array_a.length;i++)
{
    switch (array_a[i])
    {
        case 0: break;
        default:
            x1=array_a[i];
            x2=array_a[i]-2;
            x3=array_a[i]-12;
            x4=array_a[i]-14;
            x5=array_a[i]-24;
            x6=array_a[i]-26;

            x11=new String (x1) ;
            for ( var iii=x11.length;iii<thelength;iii++) {
                x11="0"+" "+x11;
            }
            x22=new String (x2) ;
            for ( var iii=x22.length;iii<thelength;iii++) {
                x22="0"+" "+x22;
            }
            x33=new String (x3) ;
            for ( var iii=x33.length;iii<thelength;iii++) {
                x33="0"+" "+x33;
            }
            x44=new String (x4) ;
            for ( var iii=x44.length;iii<thelength;iii++) {
                x44="0"+" "+x44;
            }
            x55=new String (x5) ;
```


</p></body>

</html>

11.4 实筛数据

输入的数 a 为: 100000

从集合 N 中求得的相邻等距三孪生素数的组数为: 1

从集合 N 中求得的相邻等距三孪生素数为:

$x_1=091127$ $x_2=091129$ $x_3=091139$

$x_4=091141$ $x_5=091151$ $x_6=091153$

输入的数 a 为: 500000

从集合 N 中求得的相邻等距三孪生素数的组数为: 3

从集合 N 中求得的相邻等距三孪生素数为:

$x_1=091127$ $x_2=091129$ $x_3=091139$

$x_4=091141$ $x_5=091151$ $x_6=091153$

$x_1=236867$ $x_2=236869$ $x_3=236879$

$x_4=236881$ $x_5=236891$ $x_6=236893$

$x_1=422087$ $x_2=422089$ $x_3=422099$

$x_4=422101$ $x_5=422111$ $x_6=422113$

第十二章 素数等差级数

多年来人们发现的单由素数组成的等差级数的项数越来越大,下面表中列出的只是其中项数较大的一部分。

等差级数的一般表示形式为

$$c, c+d, \dots, c+(n-1)d$$

式中 c 为首项, d 为公差, n 为项数。

假若其中每一项都为素数,则称该等差级数为“素数等差级数”,或者更具体一点称为“ n 项素数等差级数”。根据实际发现的素数等差级数的项数越来越大这一点,猜想应该有任何大项数的素数等差级数,但还未得到证明。至今,这个问题仍为数论中一个公认没有解决的问题,值得探讨。

素数组成的长等差级数表

项数 n	公 差 d	首 项 c	末项 $c+(n-1)d$
12	30030	23143	353473
13	510510	766439	6892559
14	2462460	46883579	78895559
16	9699690	53297929	198793279
16	223092870	2236133941	5582526991
17	87297210	3430751869	4827507229
18	717777060	4808316343	17010526363
19	4180566390	8297644387	83547839407
19	13608665070	244290205469	489246176729
20	2007835830	803467381001	841616261771
20	7643355720	1140997291211	1286221049891

续表

项数 n	公差 d	首项 c	末项 $c + (n-1)d$
20	18846497670	214861583621	572945039351
20	1140004565700	1845449006227	23505535754527
20	19855265430	24845147147111	25222397190281
21	1419763024680	142072321123	28537332814723

表中给出的是由 James Fry, V.A.Golubev, Andrew Moran, Paul Pritchard, S.C.Root, W.N.Seredinskii, S.Weintraub 和 Jeff Young 所发现的由 n 项素数组成的等差级数。

12.1 求解证明

设 A 为某一选定的正整数, 将不超过 A 的全部正整数集合用 E 表示。

以埃氏筛法求得不超过 $A^{1/2}$ 的全部素数集合 P , 并将集合 P 中元素按数值大小顺序排列如下:

$$P = (p_1, p_2, \dots, p_r)$$

$$2 = p_1 < p_2 < \dots < p_r \leq A^{1/2}$$

给出项数 n , 再设定相关参量:

$$n \leq p_t - 1 \quad (1)$$

$$d = \prod_{i=1}^t p_i \quad (2)$$

选定 A 值, 使 p_r 满足下述不等式:

$$p_r > dp_t \quad (3)$$

将不超过 A 且大于 $2p_r$ 的全部正整数集合用 N 表示, 即

$$N = (2p_r + 1, 2p_r + 2, \dots, A)$$

则 N 的基数 $|N|$ 为

$$|N| = A - 2p_r \geq p_r^2 - 2p_r \quad (4)$$

用筛选方法从集合 N 中分选出必要的子集。

给定筛选条件:

$$g \not\equiv kd \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (5)$$

$$k = 0, 1, \dots, n-1$$

g 表示集合 N 中被选元素。

从集合 N 中, 将符合 (5) 式筛选条件的所有元素分选出来, 组成子集 N_B , 再来讨论子集 N_B 的基数 $|N_B|$ (筛函数)。

12.1.1 求证筛函数的下界

已知, 集合 N 为自然数列集合, 模数集合 P 中元素为互不相同的素数。根据第一章的相关公式 (61) 式可知, 基数 $|N_B|$ 的近似估算公式为

$$|N_B| = |N| \prod_{i=1}^r \left(\frac{\alpha_i}{p_i} \right) \quad (6)$$

根据第一章的 (72) 式可知, 基数 $|N_B|$ 的下界计算公式为

$$|N_B| > |N| \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{p_i}{|N|} \right) \left(\frac{\alpha_i}{p_i} \right) \quad (7)$$

其中, α_i 为根据筛选条件所选取的集合 N 中模 p_i 的同余类子集的个数。下面具体确定 α_i 的数值。

当 $i \leq t$ 时, $p_i \leq p_t$

由 (2) 式知, 所有不超过 p_t 的素数都是公差 d 的素因子。

所以, 这时有

$$d \equiv 0 \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, t \quad (8)$$

筛选条件 (5) 式将合并为一个条件:

$$g \not\equiv 0 \pmod{p_i}, \quad i=1,2,\dots,t \quad (9)$$

依据 (9) 式可知, 集合 N 中只有模 p_i 的“0 同余类子集”不符合筛选条件, 其余 (p_i-1) 个模 p_i 的同余类子集都符合筛选条件, 故得

$$\alpha_i = p_i - 1, \quad i=1,2,\dots,t \quad (10)$$

当, $i > t$ 时, $p_i > p_t$

由 (2) 式知, 所有大于 p_t 的素数都不是公差 d 的素因子。故数组: $0, d, \dots, (n-1)d$ 中每两两之间的差值皆不能被 $p_i (> n)$ 整除, 即该数组中所有元素每两两之间对模 p_i 皆不同余。由此知, 筛选条件 (5) 式根据不同的 k 值实际包含了 n 个不同的条件, 这 n 个不同的条件对应于模 p_i 的 n 个不同的同余类子集。此时集合 N 中将有 n 个模 p_i 的同余类子集都不符合筛选条件, 其余 $p_i - n$ 个模 p_i 的同余类子集则能符合筛选条件。故得

$$\alpha_i = p_i - n, \quad i > t \quad (11)$$

将 (10), (11) 代入 (6) 式可得

$$|N_B| = |N| \prod_{i=1}^t \left(\frac{p_i-1}{p_i} \right) \prod_{j=t+1}^r \left(\frac{p_j-n}{p_j} \right) \quad (12)$$

将 (10), (11) 代入 (7) 式可得

$$|N_B| > F_1 |N| \prod_{i=1}^t \left(\frac{p_i-1}{p_i} \right) \prod_{j=t+1}^r \left(\frac{p_j-n}{p_j} \right) \quad (13)$$

$$F_1 = \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{p_i}{|N|} \right) > 1 - \left(\frac{1}{|N|} \right) \sum_{i=1}^r p_i \quad (14)$$

由第一章 (77) 式推得

$$\Pi(x) - \Pi\left(\frac{x}{2}\right) < \Pi\left(\frac{x}{2}\right)$$

可见, 数值越大的区域素数分布的密度越小, 故得

$$\sum_{i=1}^r p_i < \left(\frac{1}{2}\right)(p_1 + p_r) \Pi(p_r) \quad (15)$$

依据切比晓夫不等式可知

$$\Pi(p_r) < (6 \ln 2) \left(\frac{p_r}{\ln p_r} \right) \quad (16)$$

(16) 代入 (15) 式, 得,

$$\sum_{i=1}^r p_i < \frac{(3 \ln 2)(p_1 + p_r)p_r}{\ln p_r} \quad (17)$$

(17) 式代入 (14) 式得

$$F_1 > 1 - \frac{(3 \ln 2)(p_1 + p_r)p_r}{|N| \ln p_r} \quad (18)$$

将 (18) 代入 (13) 式得

$$|N_B| > F_2 \prod_{j=t+1}^r \left(\frac{p_j - n}{p_j} \right) \quad (19)$$

$$F_2 = \left\{ |N| - \frac{(3 \ln 2)(p_1 + p_r)p_r}{\ln p_r} \right\} \prod_{i=1}^t \left(\frac{p_i - 1}{p_i} \right) \quad (20)$$

对 $|N|$ 作以下变换。

$$|N| = |N| \left(\frac{p_2}{p_3 - 1} \right) + \frac{|N|}{p_3 - 1} \quad (21)$$

$$|N| = |N| \left(\frac{p_3}{p_4 - 1} \right) + \frac{|N|}{p_4 - 1} \quad (22)$$

$$|N| = |N| \left(\frac{p_4}{p_5 - 1} \right) + \frac{3|N|}{p_5 - 1} \quad (23)$$

$$|N| = |N| \left(\frac{p_5}{p_6 - 1} \right) + \frac{|N|}{p_6 - 1} \quad (24)$$

$$|N| = |N| \left(\frac{p_6}{p_7 - 1} \right) + \frac{3|N|}{p_7 - 1} \quad (25)$$

$$|N| = |N| \left(\frac{p_7}{p_8 - 1} \right) + \frac{|N|}{p_8 - 1} \quad (26)$$

$$|N| = |N| \left(\frac{p_8}{p_9 - 1} \right) + \frac{3|N|}{p_9 - 1} \quad (27)$$

$$|N| = |N| \left(\frac{p_9}{p_{10} - 1} \right) + \frac{5|N|}{p_{10} - 1} \quad (28)$$

将 (21), (22), ..., (28) 式逐次代入右端第一项可得

$$|N| = |N| \prod_{i=3}^{10} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i - 1} \right) + F_3 \quad (29)$$

$$\begin{aligned} F_3 = & \left(\frac{|N|}{p_3 - 1} \right) \prod_{i=4}^{10} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i - 1} \right) + \left(\frac{|N|}{p_4 - 1} \right) \prod_{i=5}^{10} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i - 1} \right) + \\ & \left(\frac{3|N|}{p_5 - 1} \right) \prod_{i=6}^{10} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i - 1} \right) + \left(\frac{|N|}{p_6 - 1} \right) \prod_{i=7}^{10} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i - 1} \right) + \\ & \left(\frac{3|N|}{p_7 - 1} \right) \prod_{i=8}^{10} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i - 1} \right) + \left(\frac{|N|}{p_8 - 1} \right) \prod_{i=9}^{10} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i - 1} \right) + \\ & \left(\frac{3|N|}{p_9 - 1} \right) \left(\frac{p_9}{p_{10} - 1} \right) + \left(\frac{5|N|}{p_{10} - 1} \right) \end{aligned} \quad (30)$$

将 $p_3 = 5, p_4 = 7, p_5 = 11, p_6 = 13, p_7 = 17, p_8 = 19, p_9 = 23, p_{10} = 29$ 代入 (30) 式可得

$$F_3 = 0.781 |N| \quad (31)$$

将 (31) 式代入 (29) 式, 再将 (29) 式代入 (20) 式, 可得

$$F_2 = \left\{ |N| \prod_{i=3}^{10} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i - 1} \right) + F_4 \right\} \prod_{i=1}^t \left(\frac{p_i - 1}{p_i} \right) \quad (32)$$

$$F_4 = 0.781|N| - \frac{(3\ln 2)(p_1 + p_r)p_r}{\ln p_r} \quad (33)$$

由 (4) 式可知

$$|N| \geq p_r^2 - 2p_r \quad (34)$$

(34) 式代入 (33) 式可得

$$F_4 \geq 0.781(p_r - 2)p_r - \frac{(3\ln 2)(p_1 + p_r)p_r}{\ln p_r} \quad (35)$$

$$\text{令 } F_5 = 0.781(p_r - 2) - \frac{(3\ln 2)(p_1 + p_r)}{\ln p_r} \quad (36)$$

$$\text{则 } F_4 > F_5 p_r \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \frac{dF_5}{dp_r} &= 0.781 - (3\ln 2) \left\{ \frac{\ln p_r - (p_1 + p_r)(1/p_r)}{\ln^2 p_r} \right\} = \\ &0.781 - \frac{3\ln 2}{\ln p_r} + \frac{(3\ln 2)(p_1 + p_r)}{p_r \ln^2 p_r} > \\ &0.781 - \frac{3\ln 2}{\ln p_r} \end{aligned} \quad (38)$$

$$\text{令 } 0.781 - \frac{3\ln 2}{\ln p_r} > 0$$

$$\text{可得 } p_r > 14.33 \quad (39)$$

将条件 (39) 式代入 (38) 式可得

$$\frac{dF_5}{dp_r} > 0 \quad (p_r > 14.33) \quad (40)$$

(40) 式表示, 当 $p_r > 14.33$ 时, F_5 为 p_r 的递增函数。

当 $A \geq \prod_{i=1}^{11} p_i^2$ 时, $p_r > 10^{10} \gg 14.33$

且 $F_5(p_r = 10^{10}) > 10^9$, 故知

$$F_5 > 10^9 \quad (A \geq \prod_{i=1}^{11} p_i^2) \quad (41)$$

将 (41) 式代入 (37) 式, 再将 (37) 式代入 (32) 式可得

$$F_2 > |N| \left(\frac{1}{3}\right) \prod_{i=3}^{10} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i}\right) \prod_{j=1}^t \left(\frac{p_j-1}{p_j}\right) + 10^9 p_r \prod_{i=1}^t \left(\frac{p_i-1}{p_i}\right) \quad (42)$$

$$\text{由于 } p_i - 1 \geq p_{i-1}, \quad i \geq 2 \quad (43)$$

故得

$$F_2 > \left(\frac{|N|}{3}\right) \prod_{i=3}^t \left(\frac{p_{i-1}}{p_i}\right) + (10^9 p_r) \left(\frac{1}{2}\right) \prod_{i=2}^t \left(\frac{p_{i-1}}{p_i}\right) = \frac{N}{p_t} + (10^9) \left(\frac{p_r}{p_t}\right) \quad (44)$$

将 (44) 代入 (19) 式可得

$$|N_B| > \left\{ \frac{|N|}{p_t} + (10^9) \left(\frac{p_r}{p_t}\right) \right\} \prod_{i=t+1}^r \left\{ \frac{p_i - n}{p_i} \right\} \quad (45)$$

由 (4) 式可知

$$|N| \geq p_r^2 - 2p_r \quad (46)$$

(46) 式代入 (45) 式, 得

$$|N_B| > \{p_r^2 + (10^9 - 2)p_r\} \left(\frac{1}{p_t}\right) \prod_{i=t+1}^r \left(\frac{p_i - n}{p_i}\right) \quad (47)$$

由于 $p_{r+1} > p_r > dp_t$, 根据 (3) 式条件要求, 完全可以选用 p_{r+1} 取代 p_r (项数 n 和其它参量都不变)。同上推导过程可得

$$|N_{B1}| > \{p_{r+1}^2 + (10^9 - 2)p_{r+1}\} \left(\frac{1}{p_t}\right) \prod_{i=t+1}^{r+1} \left(\frac{p_i - n}{p_i}\right) \quad (48)$$

设在 p_r 处, 相邻素数的平均间距为 d , 则得

$$p_{r+1} = d + p_r \quad (49)$$

$$\text{即 } d = p_{r+1} - p_r \quad (50)$$

$$\text{令 } \lambda = 10^9 - 2 \quad (51)$$

$$H = \prod_{i=t+1}^r \left(\frac{p_i - n}{p_i} \right) \quad (52)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{p_t} \quad (53)$$

将 (49), (51), (52), (53) 式代入 (48) 式得

$$\begin{aligned} |N_{B1}| &> \{(d + p_r)^2 + \lambda(d + p_r)\} \varepsilon H \left(1 - \frac{n}{p_{r+1}}\right) = \\ & (p_r^2 + \lambda p_r) \varepsilon H - (p_r^2 + \lambda p_r) \varepsilon H \left(\frac{n}{p_{r+1}}\right) + \\ & (d^2 + 2dp_r + \lambda d) \varepsilon H \left(1 - \frac{n}{p_{r+1}}\right) = \\ & (p_r^2 + \lambda p_r) \varepsilon H - (p_r^2 + \lambda p_r) \left(\frac{\varepsilon H n}{p_{r+1}}\right) + \\ & (d^2 + 2dp_r + \lambda d) (p_r + d) \left(\frac{\varepsilon H}{p_{r+1}}\right) - \\ & (d^2 + 2dp_r + \lambda d) \left(\frac{\varepsilon H n}{p_{r+1}}\right) = \\ & (p_r^2 + \lambda p_r) \varepsilon H + \left(\frac{\varepsilon H}{p_{r+1}}\right) M \end{aligned} \quad (54)$$

式中

$$\begin{aligned} M &= 2dp_r^2 + (d^2 + \lambda d)p_r + 2d^2p_r + (d^2 + \lambda d)d - \\ & np_r^2 - \lambda np_r - 2ndp_r - d^2n - \lambda nd = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2dp_r^2 + (3d^2 + \lambda d)p_r + (d^2 + \lambda d)d - \\
& np_r^2 - (2d + \lambda)np_r - (d^2 + \lambda d)n = \\
& dp_r^2 + d^2p_r + (d - n)p_r^2 + \\
& (d - n)(2d + \lambda)p_r + (d - n)(d^2 + \lambda d)
\end{aligned} \tag{55}$$

由第一章 (77) 式可知

$$\Pi(p_r) = \eta\left(\frac{p_r}{\ln p_r}\right) \tag{56}$$

$$\Pi(p_{r+1}) = \eta\left(\frac{p_{r+1}}{\ln p_{r+1}}\right) \tag{57}$$

$$\begin{aligned}
\Pi(p_{r+1}) - \Pi(p_r) &= \eta\left(\frac{p_{r+1}}{\ln p_{r+1}}\right) - \eta\left(\frac{p_r}{\ln p_r}\right) \\
1 &= \frac{\eta p_{r+1} \ln p_r - \eta p_r \ln p_{r+1}}{\ln p_{r+1} \ln p_r} \\
\eta p_{r+1} \ln p_r - \eta p_r \ln p_{r+1} &= \ln p_{r+1} \ln p_r
\end{aligned} \tag{58}$$

由于 $\ln p_{r+1} > \ln p_r$

故知

$$\eta p_{r+1} \ln p_{r+1} - \eta p_r \ln p_{r+1} > \eta p_{r+1} \ln p_r - \eta p_r \ln p_{r+1} \tag{59}$$

将 (58) 式代入 (59) 式, 得

$$\eta(p_{r+1} - p_r) > \ln p_r \tag{60}$$

$$\text{令 } \frac{\ln p_r}{\eta} > n$$

$$\text{得 } p_r > e^{n\eta} \tag{61}$$

将条件 (61) 式代入 (60) 式, 可得

$$p_{r+1} - p_r > n \quad (p_r > e^{n\eta}) \tag{62}$$

将 (50) 式代入 (62) 式, 得

$$d > n \quad (p_r > e^{n\eta}) \quad (63)$$

将 (63) 式代入 (55) 式, 可得

$$M > dp_r^2 + d^2 p_r \quad (64)$$

将 (64) 式代入 (54) 式, 可得

$$|N_{B1}| > \{p_r^2 + (\lambda + d)p_r\} \varepsilon H \quad (65)$$

将 (51), (52), (53) 式代入 (47) 式, 可得

$$|N_B| > (p_r^2 + \lambda p_r) \varepsilon H \quad (66)$$

比较 (65) 式和 (66) 式可知, $|N_B|$ 的下界值随着 p_r 的增大而增大, 而且相关增量 d 根据 (50) 和 (60) 式可知, 亦为 p_r 的递增函数。 p_r 又是一个没有固定上界限制的, 能够随意选取。故总可以选择一个合适的 p_r 值, 使得满足下述不等式:

$$|N_B| > 1 \quad (67)$$

12.1.2 通过子集 N_B 求解

从子集 N_B 中任取一元素 x_0 再引入参量:

$$x_k = x_0 - kd, \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \quad (68)$$

由其定义可知:

$$x_k \in E, \quad x_k > 1, \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \quad (69)$$

以集合 P 中各元素为模数, 求得同余式组:

$$x_0 \equiv x_{0i} \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (70)$$

$$x_k \equiv x_{ki} \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (71)$$

$$k = 1, 2, \dots, n-1$$

根据 x_0 的定义可知

$$x_0 \in E, \quad x_0 > 1 \quad (72)$$

由于 $x_0 \in N_B$, 由筛选条件 (5) 式可知

$$x_{0i} \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (73)$$

$$x_{0i} \not\equiv kd \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (74)$$

$$k = 1, 2, \dots, n-1$$

依据同余式的性质, 由 (68) 式可推得

$$x_{ki} \equiv x_{0i} - kd \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (75)$$

$$k = 1, 2, \dots, n-1$$

由 (74) 和 (75) 式可知

$$x_{ki} \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (76)$$

$$k = 1, 2, \dots, n-1$$

根据第一章引理 3, 由 (72) 和 (73) 式可知: x_0 为奇素数

根据第一章引理 3, 由 (69) 和 (76) 式可知: x_k 为奇素数
($k = 1, 2, \dots, n-1$)。

即, 数组 $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ 中所有元素都是奇素数。

根据 (68) 式可知, 该数组还是等差级数, 其项数为 n 。所以, 该数组构成“ n 项素数等差级数”。(其中项数 n 为未定量, 可以随意选取)。

已知 x_0 为集合 N_B 中任一元素, 故 N_B 中每个元素都对应一组“ n 项素数等差级数”。而且项数 n 可以任意给定, 没有上界限制。

12.2 求解程序

下面是用 ASP 写的求解程序, 包括输入界面和运算显示共三个文件:

第一个文件 (input.asp):

```
<%dim n1,n
n1=request.form("a")
n=0
```



```
if n1 <> "" then
    n=cLng(n1)
end if
%>

<html>
<head>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=
gb2312">
<LINK href="/style.css" type=text/css rel=stylesheet>
<title>素数等差级数</title>
<script language="JavaScript" >
function suborno(){
    var a=form1.a.value;
    if(a==""||a==null){
        alert("请输入一个项数 n(大于 2) ! ");
        form1.a.focus();
        return;
    }form1.submit();
}
</script>

</head>

<body bgcolor="#BFC0B6">
<p align="center"><font color="#FF0000" size="4"><strong>
素数等差级数</strong></font></p>
<p align="center">&nbsp;</p>
<p align="center">&nbsp;</p>
<p align="center">如果您输入的整数较大，计算时间将会较
长，请耐心等待！</p>
```

[illegible]

```
flag=1;
for(j=2;j<=(i/2);j++)
{
    if(i%j==0)
    {
        flag=0;
        break;
    }
}
if(flag==1){
    pt=i;
    break;
}
}
var array_pi = new Array();
i=0;
var pi
for(pi=2;pi<=pt;pi++)
{
    alert(array_pi[i]);
    flag=1;
    for(j=2;j<=(pi/2);j++)
    {
        if(pi%j==0)
        {
            flag=0;
            break;
        }
    }
    if(flag==1)
    {
        array_pi[i]=pi;
```

```
        i++;
    }
}
var d=1;
for(i=0;i<array_pi.length;i++){
    d=d*array_pi[i];
}
var thea=d*d*pt*pt;
//alert("pt="+pt+"n="+n);
form2.thea.value=thea;
form2.n.value=n;
form2.pt.value=pt;
form2.submit();
}
</script>
```

第二个文件 (input2.asp):

```
<%
dim thea,n,pt
thea=request("thea")
n=request("n")
pt=request("pt")
%>
<html>
<head>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=
gb2312">
<LINK href="/style.css" type=text/css rel=stylesheet>
<title>素数等差级数</title>
```

```
<script language="JavaScript" >
function suborno(){
var thea=parseInt("<%=thea%>");
var a=form1.a.value;
if(a=="||a==null){
    alert("请输入任一正整数（大于"+thea+"）!");
    form1.a.focus();
    return;
}/*else if(parseInt(a)<thea){
    alert("输入的偶数必须是大于"+thea+"的正整数!");
    return;
}*/form1.submit();
}
</script>

</head>

<body bgcolor="#BFC0B6">
<p align="center"><font color="#FF0000" size="4"><strong>
素数等差级数</strong></font></p>
<p align="center">&nbsp;</p>
<p align="center">&nbsp;</p>
<p align="center">如果您输入的整数较大，计算时间将会较
长，请耐心等待！<br>
<br>
<a href="input.asp">重输入项数</a></p>
<form name="form1" method="post" action="sievejs.asp">
    <table width="500" border="0" align="center" cellpadding=
"5" cellspacing="0">
        <tr>
```

[illegible]

```
第三个文件 (sievejs.asp):
<%a=clng(request.form("a"))
n=request.form("n")
pt=request.form("pt")
%>
<html>
<head>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html;
charset=gb2312">
```

```

<LINK href="/style.css" type=text/css rel=stylesheet>
<title>素数等差级数</title>
</head>
<body bgcolor="#BFC0B6"><br>&nbsp;<br>&nbsp;<br>&nbsp;<br>
  <div align="center" id="wait_div"><font color="#FF0000"
size="4"><strong>如果出现提示“.....是否取消该脚本? ”, 请点击“否”, 并请耐心等待! </strong></font></div>
  <div align="center" id="wait2_div" style="display:none"><font
color="#FF0000" size="5"><strong>素数组成的等差级数求解运算结果</strong></font><br><br>
    <a href="input.asp">重输入项数</a><br>
    <br>
    <a href="javascript:history.go(-1);">重输入 a</a></div>
<p><script language="JavaScript">

```

```

var a, i, pi, j, flag, ni, n, m, x, y, k, pr, ther, num1, num2, num3, d, t, d1, maxk,
theitems, pt;

```

```

//var array_ni = new Array();
var array_pi = new Array();
//var array_pi2 = new Array();
var array_n = new Array();
var array_k = new Array();
//var array_hi = new Array();
//var array_pi_ni = new Array()
//a=clng(request.form("a"))
num1=0;
num2=0;
num3=0;
a=parseInt("<%=a%>");
theitems=parseInt("<%=n%>");

```



```

        break;
    }
}
if(flag==1)
{
    //ni=n%pi;
    //array_ni[i]=ni;
    array_pi[i]=pi;
    //array_pi2[i]=pi;
    //array_ai[i]=a%pi;
    //array_pi_ni[i]=pi-ni
    //alert(array_pi[i]);
    i++;
}
}

ther=i;

d1=1;
d=1;
/*for(i=parseInt(ther/3);i>=2;i--){
    d1=1;
    for(j=i;j>=0;j--){
        d1=d1*array_pi[j];
    }*/
for(i=0;array_pi[i]<=pt;i++){
    d=d*array_pi[i];
    /*if(d1>pr){
        t=i-2;
        d=(d1/array_pi[i]);
    }*/
}

```

```
        pt=array_pi[i-1];
        maxk=array_pi[i-1]-3;
        theitems=maxk+1;
        break;
    }*/
}
//alert("d="+d+"theitems="+theitems);
j=0;
for(i=((1+pt)*pr)+1;i<=a;i++){
    array_n[j]=i;
    //alert(array_n[i]);
    j++;
}

for(i=0;i<=maxk;i++){
    array_k[i]=i;
}

for(i=0;i<array_n.length;i++){
    for(j=0;j<array_k.length;j++){
        flag=1;
        for(thep=0;thep<array_pi.length;thep++){

            if(array_n[i]%array_pi[thep]==(d*array_k[j])%(array_pi[thep]))
        ){
            array_n[i]=0;
            flag=0;
            break;
        }
    }
}
```



```
        }  
        m++;  
    } document.write("<br>");  
}  
  
}  
}  
  
document.all("wait_div").style.display="none";  
document.all("wait2_div").style.display="";  
}  
</script>  
</p></body>  
</html>
```

12.3 实筛数据

输入的整数 a 为: 10000 输入的项数 n 为: 5

从集合 N 中求得的素数等差级数的组数为: 65

从集合 N 中求得的素数等差级数为:

967 757 547 337 127

997 787 577 367 157

1019 809 599 389 179

1039 829 619 409 199

1063 853 643 433 223

1097 887 677 467 257

1193 983 773 563 353

1229 1019 809 599 389

1249 1039 829 619 409

1303 1093 883 673 463

1307 1097 887 677 467

1439 1229 1019 809 599

1459 1249 1039 829 619
1583 1373 1163 953 743
1669 1459 1249 1039 829
1699 1489 1279 1069 859
1721 1511 1301 1091 881
1879 1669 1459 1249 1039
1931 1721 1511 1301 1091
2089 1879 1669 1459 1249
2141 1931 1721 1511 1301
2161 1951 1741 1531 1321
2293 2083 1873 1663 1453
2351 2141 1931 1721 1511
2371 2161 1951 1741 1531
2503 2293 2083 1873 1663
2713 2503 2293 2083 1873
2843 2633 2423 2213 2003
3221 3011 2801 2591 2381
3539 3329 3119 2909 2699
3767 3557 3347 3137 2927
3793 3583 3373 3163 2953
3881 3671 3461 3251 3041
4003 3793 3583 3373 3163
4091 3881 3671 3461 3251
4339 4129 3919 3709 3499
4549 4339 4129 3919 3709
4703 4493 4283 4073 3863
4759 4549 4339 4129 3919
4861 4651 4441 4231 4021
4969 4759 4549 4339 4129
5179 4969 4759 4549 4339
5443 5233 5023 4813 4603

5519 5309 5099 4889 4679
5653 5443 5233 5023 4813
5717 5507 5297 5087 4877
5861 5651 5441 5231 5021
5927 5717 5507 5297 5087
6011 5801 5591 5381 5171
6067 5857 5647 5437 5227
6113 5903 5693 5483 5273
6221 6011 5801 5591 5381
6277 6067 5857 5647 5437
6323 6113 5903 5693 5483
6763 6553 6343 6133 5923
6991 6781 6571 6361 6151
7331 7121 6911 6701 6491
7541 7331 7121 6911 6701
8147 7937 7727 7517 7307
8941 8731 8521 8311 8101
9049 8839 8629 8419 8209
9151 8941 8731 8521 8311
9601 9391 9181 8971 8761
9811 9601 9391 9181 8971
9839 9629 9419 9209 8999

输入的整数 a 为: 100000 输入的项数 n 为: 7

从集合 N 中求得的素数等差级数的组数为: 76

从集合 N 中求得的素数等差级数为:

4003 1693 -617 -2927 -5237 -7547 -9857
4241 1931 -379 -2689 -4999 -7309 -9619
4999 2689 379 -1931 -4241 -6551 -8861
6277 3967 1657 -653 -2963 -5273 -7583
6361 4051 1741 -569 -2879 -5189 -7499

6551 4241 1931 -379 -2689 -4999 -7309
7309 4999 2689 379 -1931 -4241 -6551
7499 5189 2879 569 -1741 -4051 -6361
7583 5273 2963 653 -1657 -3967 -6277
8861 6551 4241 1931 -379 -2689 -4999
9619 7309 4999 2689 379 -1931 -4241
9857 7547 5237 2927 617 -1693 -4003
10099 7789 5479 3169 859 -1451 -3761
10151 7841 5531 3221 911 -1399 -3709
11171 8861 6551 4241 1931 -379 -2689
12409 10099 7789 5479 3169 859 -1451
12569 10259 7949 5639 3329 1019 -1291
12583 10273 7963 5653 3343 1033 -1277
12973 10663 8353 6043 3733 1423 -887
13297 10987 8677 6367 4057 1747 -563
14407 12097 9787 7477 5167 2857 547
14879 12569 10259 7949 5639 3329 1019
14923 12613 10303 7993 5683 3373 1063
15227 12917 10607 8297 5987 3677 1367
15607 13297 10987 8677 6367 4057 1747
16067 13757 11447 9137 6827 4517 2207
17189 14879 12569 10259 7949 5639 3329
17683 15373 13063 10753 8443 6133 3823
19417 17107 14797 12487 10177 7867 5557
19433 17123 14813 12503 10193 7883 5573
19993 17683 15373 13063 10753 8443 6133
21713 19403 17093 14783 12473 10163 7853
21727 19417 17107 14797 12487 10177 7867
22303 19993 17683 15373 13063 10753 8443
23801 21491 19181 16871 14561 12251 9941
24023 21713 19403 17093 14783 12473 10163

26111	23801	21491	19181	16871	14561	12251
26141	23831	21521	19211	16901	14591	12281
28309	25999	23689	21379	19069	16759	14449
30089	27779	25469	23159	20849	18539	16229
32321	30011	27701	25391	23081	20771	18461
33119	30809	28499	26189	23879	21569	19259
34337	32027	29717	27407	25097	22787	20477
34631	32321	30011	27701	25391	23081	20771
35423	33113	30803	28493	26183	23873	21563
35797	33487	31177	28867	26557	24247	21937
36671	34361	32051	29741	27431	25121	22811
37633	35323	33013	30703	28393	26083	23773
39901	37591	35281	32971	30661	28351	26041
41669	39359	37049	34739	32429	30119	27809
43271	40961	38651	36341	34031	31721	29411
49117	46807	44497	42187	39877	37567	35257
49429	47119	44809	42499	40189	37879	35569
51427	49117	46807	44497	42187	39877	37567
52901	50591	48281	45971	43661	41351	39041
55813	53503	51193	48883	46573	44263	41953
57191	54881	52571	50261	47951	45641	43331
63803	61493	59183	56873	54563	52253	49943
70451	68141	65831	63521	61211	58901	56591
74177	71867	69557	67247	64937	62627	60317
76487	74177	71867	69557	67247	64937	62627
78797	76487	74177	71867	69557	67247	64937
84859	82549	80239	77929	75619	73309	70999
87103	84793	82483	80173	77863	75553	73243
87679	85369	83059	80749	78439	76129	73819
89413	87103	84793	82483	80173	77863	75553
89989	87679	85369	83059	80749	78439	76129

93287 90977 88667 86357 84047 81737 79427
94111 91801 89491 87181 84871 82561 80251
94621 92311 90001 87691 85381 83071 80761
95597 93287 90977 88667 86357 84047 81737
95813 93503 91193 88883 86573 84263 81953
96931 94621 92311 90001 87691 85381 83071
97577 95267 92957 90647 88337 86027 83717
98123 95813 93503 91193 88883 86573 84263
99241 96931 94621 92311 90001 87691 85381

输入的整数 a 为: 200000 输入的项数 n 为: 9

从集合 N 中求得的素数等差级数的组数为: 4

从集合 N 中求得的素数等差级数为:

17189 14879 12569 10259 7949 5639 3329 1019 -1291
22303 19993 17683 15373 13063 10753 8443 6133 3823
78797 76487 74177 71867 69557 67247 64937 62627 60317
99241 96931 94621 92311 90001 87691 85381 83071 80761

第十三章 孪生素数组成的双等差级数

在第十二章中我们讨论了奇素数组成的等差级数的项数问题, 并证明存在任意大项数的奇素数组成的等差级数。与此同类的还有孪生素数组成的双等差级数的项数问题, 将在本章中做以讨论。

13.1 求解证明

设 A 为某个选定的正整数, 将不超过 A 的全部正整数集合用 E 表示。

以埃氏筛法求得不超过 $A^{1/2}$ 的全部素数集合 P , 并将集合 P 中元素按数值大小顺序排列如下:

$$P = (p_1, p_2, \dots, p_r)$$

$$2 = p_1 < p_2 < \dots < p_r \leq A^{1/2}$$

给出项数 f , 再设定相关参量:

$$f \leq \frac{p_t - 1}{2} \quad (1)$$

$$d = \prod_{i=1}^t p_i \quad (2)$$

选定 A 值, 使 p_r 满足下述不等式:

$$p_r > dp_t \quad (3)$$

将不超过 A 且大于 $2p_r$ 的全部正整数集合用 N 表示, 即 $N = (2p_r + 1, 2p_r + 2, \dots, A)$, 其基数 $|N|$ 则为

$$|N| = A - 2p_r \geq p_r^2 - 2p_r \quad (4)$$

用筛选方法从集合 N 中分选出必要的子集。

给定筛选条件:

$$g \not\equiv kd \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (5)$$

$$k = 0, 1, \dots, f-1$$

$$g \not\equiv kd + 2 \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (6)$$

$$k = 0, 1, \dots, f-1$$

g 表示集合 N 中被选元素。

从集合 N 中将同时符合 (5), (6) 式条件的所有元素分选出来组成子集 N_B , 再来讨论子集 N_B 的基数 $|N_B|$ (筛函数)。

13.1.1 求证筛函数的下界

集合 N 为自然数列集合, 模数集合 P 中元素为互不相同的素数, 根据第一章的相关公式 (61) 式可知基数 $|N_B|$ 的近似估算公式为

$$|N_B| > |N| \prod_{i=1}^r \left(\frac{\alpha_i}{p_i} \right) \quad (7)$$

根据第一章中给出的 (72) 式可知, 基数 $|N_B|$ 的下界计算公式为

$$|N_B| > |N| \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{p_i}{|N|} \right) \left(\frac{\alpha_i}{p_i} \right) \quad (8)$$

式中 α_i 为集合 N 中按照筛选条件所选取的模 p_i 的同余类子集的个数, 下面具体确定 α_i 的数值。

当 $i=1$ 时, $p_1 = 2$, 而且 p_1 是 d 的素因子, 所以

$$kd \equiv 0 \pmod{p_1}, \quad k = 0, 1, \dots, f-1$$

$$kd + 2 \equiv 0 \pmod{p_1}, \quad k = 0, 1, \dots, f-1$$

此时, (5), (6) 式合并为一个条件:

$$g \not\equiv 0 \pmod{p_i} \quad (9)$$

由 (9) 式可知, 集合 N 中模 p_i 的“0 同余类子集”不符合筛选条件, 而模 p_i 的“1 同余类子集”符合筛选条件。故得

$$\alpha_i = 1 \quad (10)$$

当 $i > 1$, 且 $i \leq t$ 时, 由 (2) 式可知, 此时 $p_i (i = 2, 3, \dots, t)$ 皆为 d 的素因子, 所以

$$kd \equiv 0 \pmod{p_i}, \quad i = 2, 3, \dots, t$$

$$k = 0, 1, \dots, f-1$$

$$kd + 2 \equiv 2 \pmod{p_i}, \quad i = 2, 3, \dots, t$$

$$k = 0, 1, \dots, f-1$$

由此, (5), (6) 式合并为以下两个条件:

$$g \not\equiv 0 \pmod{p_i}, \quad i = 2, 3, \dots, t \quad (11)$$

$$g \not\equiv 2 \pmod{p_i}, \quad i = 2, 3, \dots, t \quad (11^*)$$

由 (11) 和 (11*) 式可知, 集合 N 中除去模 p_i 的“0 同余类子集”和“2 同余类子集”外, 其余 $(p_i - 2)$ 个模 p_i 的同余类子集都符合筛选条件, 故得

$$\alpha_i = p_i - 2, \quad i = 2, 3, \dots, t \quad (12)$$

当 $i > t$ 时, $p_i \geq p_{t+1}$ 此时, 所有的 $p_i (i = t+1, t+2, \dots, r)$ 都不是 d 的素因子, 而且都大于 $(f-1)$, 所以数组 $kd (k = 0, 1, \dots, f-1)$ 中各元素每两两之间的差值皆不能被 p_i 整除, 故知它们每两两之间对模 p_i 皆不同余。同理可知, 数组 $kd + 2 (k = 0, 1, \dots, f-1)$ 中各元素每两两之间对模 p_i 皆不同余。

由此知, (5) 式包含了 f 个不同的筛选条件, 这 f 个筛选条件对应于模 p_i 的 f 个不同的同余类子集。(6) 式同样也对应于模

p_i 的 f 个不同的同余类子集。(5) 式和 (6) 式分别对应的这两组同余类子集相互之间可能有所重叠 (因为, 不能保证差值 $kd+2$ ($k=0,1,\dots,f-1$) 与 p_i ($i>t$) 都互素), 所以 (5) 式和 (6) 式共计对应的互不相同的同余类子集的个数 Q 应介于 f 和 $2f$ 之间。即

$$f < Q \leq 2f \quad (13)$$

这样一来, 根据 (5) 式和 (6) 式筛选条件, 集合 N 中有模 p_i 的 Q 个同余类子集不符合筛选条件, 其余模 p_i 的 $p_i - Q$ 个同余类子集都符合筛选条件。故得

$$\alpha_i = (p_i - Q), \quad i > t \quad (14)$$

将 (10), (12) 和 (14) 代入 (7) 式可得

$$|N_B| > |N| \left(\frac{1}{2}\right) \prod_{i=2}^t \left(\frac{p_i-2}{p_i}\right) \prod_{j=t+1}^r \left(\frac{p_j-Q}{p_j}\right) \quad (15)$$

将 (10), (12) 和 (14) 代入 (8) 式可得

$$|N_B| > F_1 |N| \left(\frac{1}{2}\right) \prod_{i=2}^t \left(\frac{p_i-2}{p_i}\right) \prod_{j=t+1}^r \left(\frac{p_j-Q}{p_j}\right) \quad (16)$$

$$F_1 = \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{p_i}{|N|}\right) \quad (17)$$

由于, $F_1 > 0$, 根据第一章 (64) 式可将 (16) 式改写为

$$|N_B| > F_1 \left(\frac{|N|}{2}\right) \prod_{i=2}^t \left(\frac{p_i-2}{p_i}\right) \prod_{j=t+1}^r \left(\frac{p_j-2f}{p_j}\right) \quad (18)$$

由 (17) 式可得,

$$F_1 > 1 - \left(\frac{1}{|N|}\right) \sum_{i=1}^r p_i \quad (19)$$

由第一章 (77) 式推得

$$\Pi(x) - \Pi\left(\frac{x}{2}\right) < \Pi\left(\frac{x}{2}\right) \quad (20)$$

(20) 式表明, 数值越大的区域素数分布的密度越小, 故得

$$\sum_{i=1}^r p_i < \left(\frac{1}{2}\right)(p_1 + p_r)\Pi(p_r) \quad (21)$$

由第一章 (81) 式可得

$$\Pi(p_r) < 2\left(\frac{p_r}{\ln p_r}\right) \quad (22)$$

由 (21) 和 (22) 式可得

$$\sum_{i=1}^r p_i < \frac{(p_1 + p_r)p_r}{\ln p_r} \quad (23)$$

将 (23) 代入 (19) 式可得:

$$F_1 > 1 - \frac{(p_1 + p_r)p_r}{|N|\ln p_r} \quad (24)$$

将 (24) 代入 (18) 式可得:

$$|N_B| > F_2 \prod_{j=t+1}^r \left(\frac{p_j - 2f}{p_j}\right) \quad (25)$$

$$F_2 = \left\{ \frac{|N|}{2} - \frac{(p_1 + p_r)p_r}{2\ln p_r} \right\} \prod_{i=2}^t \left(\frac{p_i - 2}{p_i}\right) \quad (26)$$

将 $\frac{|N|}{2}$ 作以下变换

$$\frac{|N|}{2} = \left(\frac{|N|}{2}\right)\left(\frac{p_2}{p_3 - 2}\right) \quad (27)$$

$$\frac{|N|}{2} = \left(\frac{|N|}{2}\right)\left(\frac{p_3}{p_4 - 2}\right) \quad (28)$$

$$\frac{|N|}{2} = \left(\frac{|N|}{2}\right)\left(\frac{p_4}{p_5 - 2}\right) + \frac{|N|}{p_5 - 2} \quad (29)$$

$$\frac{|N|}{2} = \left(\frac{|N|}{2}\right)\left(\frac{p_5}{p_6-2}\right) \quad (30)$$

$$\frac{|N|}{2} = \left(\frac{|N|}{2}\right)\left(\frac{p_6}{p_7-2}\right) + \frac{|N|}{p_7-2} \quad (31)$$

$$\frac{|N|}{2} = \left(\frac{|N|}{2}\right)\left(\frac{p_7}{p_8-2}\right) \quad (32)$$

$$\frac{|N|}{2} = \left(\frac{|N|}{2}\right)\left(\frac{p_8}{p_9-2}\right) + \frac{|N|}{p_9-2} \quad (33)$$

$$\frac{|N|}{2} = \left(\frac{|N|}{2}\right)\left(\frac{p_9}{p_{10}-2}\right) + \frac{2|N|}{p_{10}-2} \quad (34)$$

将 (27), (28), ..., (34) 式逐次代入可得

$$\frac{|N|}{2} = \left(\frac{|N|}{2}\right) \prod_{i=3}^{10} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right) + F_3 \quad (35)$$

$$F_3 = \left(\frac{|N|}{p_5-2}\right) \prod_{i=6}^{10} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right) + \left(\frac{|N|}{p_7-2}\right) \prod_{i=8}^{10} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right) + \left(\frac{|N|}{p_9-2}\right)\left(\frac{p_9}{p_{10}-2}\right) + \frac{2|N|}{p_{10}-2} \quad (36)$$

将 $p_5=11$, $p_6=13$, $p_7=17$, $p_8=19$, $p_9=23$, $p_{10}=29$ 代入 (36) 式可得

$$F_3 = 0.24|N| \quad (37)$$

将 (37) 代入 (35) 再将 (35) 代入 (26) 式可得

$$F_2 = \left\{ \left(\frac{|N|}{2}\right) \prod_{i=3}^{10} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right) + F_4 \right\} \prod_{i=2}^t \left(\frac{p_i-2}{p_i}\right) \quad (38)$$

$$F_4 = 0.24|N| - \frac{(p_1+p_r)p_r}{2 \ln p_r} \quad (39)$$

将 (4) 式代入 (39) 式得

$$F_4 \geq 0.24(p_r^2 - 2p_r) - \frac{(p_1 + p_r)p_r}{2 \ln p_r}$$

$$\text{令 } F_5 = 0.24(p_r - 2) - \frac{(p_1 + p_r)}{2 \ln p_r} \quad (40)$$

$$\text{得 } F_4 \geq F_5 p_r \quad (41)$$

$$\frac{dF_5}{dp_r} = 0.24 - \left(\frac{1}{2}\right) \left\{ \frac{\ln p_r - (p_1 + p_r)(1/p_r)}{\ln^2 p_r} \right\} =$$

$$0.24 - \frac{1}{2 \ln p_r} + \frac{p_1 + p_r}{2 p_r \ln^2 p_r} >$$

$$0.24 - \frac{1}{2 \ln p_r} \quad (42)$$

$$\text{令 } 0.24 - \frac{1}{2 \ln p_r} > 0$$

$$\text{得 } p_r > 8.032 \quad (43)$$

将条件 (43) 式代入 (42) 式可得

$$\frac{dF_5}{dp_r} > 0 \quad (p_r > 8.032) \quad (44)$$

即当 $p_r > 8.032$ 时, F_5 为 p_r 的递增函数

$$\text{当 } A \geq \prod_{i=1}^{11} p_i^2 \text{ 时, } p_r > 10^{10} \gg 8.032$$

且 $F_5(p_r = 10^{10}) > 10^9$ 故得

$$F_5 > 10^9, \quad (A \geq \prod_{i=1}^{11} p_i^2) \quad (45)$$

将 (45) 代入 (41) 式可得

$$F_4 > 10^9 p_r \quad (46)$$

将, (46) 代入 (38) 式, 得

$$F_2 > \frac{|N|}{6} \prod_{i=3}^{10} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i} \right) \prod_{j=11}^t \left(\frac{p_j-2}{p_j} \right) + 10^9 p_r \prod_{i=2}^t \left(\frac{p_i-2}{p_i} \right) \quad (47)$$

$$\text{由于 } p_i - 2 \geq p_{i-1}, \quad i \geq 3 \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \text{得: } F_2 &\geq \frac{|N|}{6} \prod_{i=3}^t \left(\frac{p_{i-1}}{p_i} \right) + 10^9 \left(\frac{p_r}{3} \right) \prod_{i=3}^t \left(\frac{p_{i-1}}{p_i} \right) = \\ &\frac{|N|}{2p_t} + 10^9 \left(\frac{p_r}{p_t} \right) \end{aligned} \quad (49)$$

将 (49) 代入 (25) 式可得

$$|N_B| > \left\{ \frac{|N|}{2p_t} + 10^9 \left(\frac{p_r}{p_t} \right) \right\} \prod_{j=t+1}^r \left(\frac{p_j-2f}{p_j} \right) \quad (50)$$

将 (4) 式代入 (50) 式得

$$|N_B| > \{p_r^2 + 2(10^9 - 1)p_r\} \left(\frac{1}{2p_t} \right) \prod_{j=t+1}^r \left(\frac{p_j-2f}{p_j} \right) \quad (51)$$

$$\text{令 } \lambda = 2(10^9 - 1) \quad (52)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2p_t} \quad (53)$$

$$H = \prod_{j=t+1}^r \left(\frac{p_j-2f}{p_j} \right) \quad (54)$$

$$\text{得 } |N_B| > (p_r^2 + \lambda p_r) \varepsilon H \quad (55)$$

当 f , d 和 p_t 都保持不变的情况下, 根据 (3) 式条件, p_r 还可以选择更大的数值。由于 $p_{r+1} > p_r > dp_t$, 故完全可以选用 p_{r+1} 取代 p_r , 即取 $A = p_{r+1}^2$ 。同上推导过程可得筛函数的下界表达式:

$$|N_{B1}| > \{p_{r+1}^2 + 2(10^9 - 1)p_{r+1}\} \left(\frac{1}{2p_t}\right) \prod_{j=t+1}^{r+1} \left(\frac{p_j - 2f}{p_j}\right) \quad (56)$$

将 (52), (53) 和 (54) 式代入 (56) 式, 可得

$$|N_{B1}| > (p_{r+1}^2 + \lambda p_{r+1}) \varepsilon H \left(\frac{p_{r+1} - 2f}{p_{r+1}}\right) \quad (57)$$

设在 p_r 处, 相邻素数的平均间距为 d , 则得

$$d = p_{r+1} - p_r \quad (58)$$

$$\begin{aligned} |N_{B1}| &> \{(d + p_r)^2 + \lambda(d + p_r)\} \varepsilon H \left(\frac{p_{r+1} - 2f}{p_{r+1}}\right) = \\ &= (p_r^2 + \lambda p_r) \varepsilon H \left(1 - \frac{2f}{p_{r+1}}\right) + \\ &+ (d^2 + 2dp_r + \lambda d) \varepsilon H \left(\frac{p_{r+1} - 2f}{p_{r+1}}\right) = \\ &= (p_r^2 + \lambda p_r) \varepsilon H - (p_r^2 + \lambda p_r) \left(\frac{\varepsilon H 2f}{p_{r+1}}\right) + \\ &+ (d^2 + 2dp_r + \lambda d) (p_r + d) \left(\frac{\varepsilon H}{p_{r+1}}\right) - \\ &- (d^2 + 2dp_r + \lambda d) 2f \left(\frac{\varepsilon H}{p_{r+1}}\right) = \\ &= (p_r^2 + \lambda p_r) \varepsilon H + \left(\frac{\varepsilon H}{p_{r+1}}\right) M \end{aligned} \quad (59)$$

$$\begin{aligned} M &= (d^2 + 2dp_r + \lambda d)(d - 2f) + \\ &+ (d^2 + 2dp_r + \lambda d)p_r - (p_r^2 + \lambda p_r)2f = \\ &= (d^2 + 2dp_r + \lambda d)(d - 2f) + \\ &+ dp_r^2 + d^2 p_r + (p_r^2 + \lambda p_r)(d - 2f) \end{aligned} \quad (60)$$

由第一章 (77) 式可知

$$\Pi(p_r) = \eta\left(\frac{p_r}{\ln p_r}\right) \quad (61)$$

$$\Pi(p_{r+1}) = \eta\left(\frac{p_{r+1}}{\ln p_{r+1}}\right) \quad (62)$$

(62) 式和 (61) 式两端相减可得

$$1 = \frac{\eta p_{r+1} \ln p_r - \eta p_r \ln p_{r+1}}{\ln p_{r+1} \ln p_r}$$

$$\eta p_{r+1} \ln p_r - \eta p_r \ln p_{r+1} = \ln p_{r+1} \ln p_r \quad (63)$$

由于 $\ln p_{r+1} > \ln p_r$

故知:

$$\eta p_{r+1} \ln p_{r+1} - \eta p_r \ln p_{r+1} > \eta p_{r+1} \ln p_r - \eta p_r \ln p_{r+1} \quad (64)$$

由 (63) 和 (64) 式可得

$$\eta(p_{r+1} - p_r) > \ln p_r \quad (65)$$

$$\text{令 } \frac{\ln p_r}{\eta} > 2f$$

$$\text{得 } p_r > e^{2f\eta} \quad (66)$$

将条件 (66) 式代入 (65) 式可得

$$p_{r+1} - p_r > 2f \quad (p_r > e^{2f\eta}) \quad (67)$$

将 (67) 式代入 (58) 式可得

$$d > 2f \quad (p_r > e^{2f\eta}) \quad (68)$$

将 (68) 式代入 (60) 式得

$$M > dp_r^2 + d^2 p_r \quad (69)$$

将 (69) 式代入 (59) 式可得

$$|N_{B1}| > \{p_r^2 + (\lambda + d)p_r\} \varepsilon H \quad (70)$$

比较 (70) 式与 (55) 式可知, $|N_{B1}|$ 的下界值大于 $|N_B|$ 的下界值。即是说, $|N_B|$ 的下界值随着 p_r 的增大而增大, 而且相

关增量 d 根据 (58) 和 (65) 式可知, 亦为 p_r 的递增函数。 p_r 是没有固定上界限制的量 (见 (3) 式), 能够随意选取, 故总可以选择到合适的 p_r , 以至获得下面的筛函数下界值:

$$|N_B| > 1 \quad (71)$$

13.1.2 通过子集 N_B 求解

从子集 N_B 中任取一元素 x_0 , 再引入参量:

$$y_0 = x_0 - 2 \quad (72)$$

$$x_k = x_0 - kd, \quad k = 1, 2, \dots, f-1 \quad (73)$$

$$y_k = x_0 - kd - 2, \quad k = 1, 2, \dots, f-1 \quad (74)$$

由其定义可知

$$x_0 \in E, \quad x_0 > 1 \quad (75)$$

$$y_0 \in E, \quad y_0 > 1 \quad (76)$$

$$x_k \in E, \quad x_k > 1, \quad k = 1, 2, \dots, f-1 \quad (77)$$

$$y_k \in E, \quad y_k > 1, \quad k = 1, 2, \dots, f-1 \quad (78)$$

以集合 P 中各元素为模数, 求得同余式组:

$$x_0 \equiv x_{0i} \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$y_0 \equiv y_{0i} \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$x_k \equiv x_{ki} \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$k = 1, 2, \dots, f-1$$

$$y_k \equiv y_{ki} \pmod{p_i} \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$k = 1, 2, \dots, f-1$$

由于 $x_0 \in N_B$, 根据筛选条件 (5), (6) 式可知

$$x_{0i} \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (79)$$

$$x_{0i} \neq 2, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (80)$$

$$x_{0i} \not\equiv kd \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (81)$$

$$k = 1, 2, \dots, f-1$$

$$x_{0i} \not\equiv kd + 2 \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (82)$$

$$k = 1, 2, \dots, f-1$$

依据同余式的性质, 由 (72), (73), (74) 式推得

$$y_{0i} \equiv x_{0i} - 2 \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (83)$$

$$x_{ki} \equiv x_{0i} - kd \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (84)$$

$$k = 1, 2, \dots, f-1$$

$$y_{ki} \equiv x_{0i} - kd - 2 \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (85)$$

$$k = 1, 2, \dots, f-1$$

由 (80) 式和 (83) 式可知

$$y_{0i} \not\equiv 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (86)$$

由于对模 p_i 不同余的两个数之间的差值必然不能被模 p_i 整除, 故从 (81) 式和 (84) 式可知

$$x_{ki} \not\equiv 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (87)$$

$$k = 1, 2, \dots, f-1$$

由 (82) 式和 (85) 式可知

$$y_{ki} \not\equiv 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (88)$$

$$k = 1, 2, \dots, f-1$$

根据第一章引理 3

由 (75) 和 (79) 式可知: x_0 为奇素数。

由 (76) 和 (86) 式可知: y_0 为奇素数。

由 (77) 和 (87) 式可知: x_k 为奇素数 ($k = 1, 2, \dots, f-1$)。

由 (78) 和 (88) 式可知: y_k 为奇素数 ($k = 1, 2, \dots, f-1$)。

结合 (72) 式、(73) 式和 (74) 式可知, x_0, x_1, \dots, x_{f-1} 和 y_0, y_1, \dots, y_{f-1} 皆为奇素数组成的等差级数。

另外, 由 (72), (73) 和 (74) 式可以求得:

$$y_k = x_k - 2, \quad k = 0, 1, 2, \dots, f-1 \quad (89)$$

(89) 式表明, 该两组等差级数

$$x_0, x_1, \dots, x_{f-1}$$

$$y_0, y_1, \dots, y_{f-1}$$

即为“孪生素数组成的双等差级数”, 其项数为 f 。

已知 x_0 为集合 N_B 中的任一元素, 故 N_B 中的每个元素都对应一组“孪生素数组成的双等差级数”。其项数 f 为未定量, 可以任意给定, 没有上界限制。

13.2 求解程序

下面是用 ASP 写的求解程序, 包括输入界面和运算显示三个文件:

第一个文件 (input.asp):

```
<%dim n1,n
```

```
n1=request.form("a")
```

```
n=0
```

```
if n1 <> "" then
```

```
    n=clng(n1)
```

```
end if
```

```
%>
```

```
<html>
```

```
<head>
```

```
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=gb2312">
```

```
<LINK href="/style.css" type="text/css" rel="stylesheet">
```

```
<title>孪生素数组成的双等差级数</title>
```

```
<script language="JavaScript" >
function suborno(){
var a=form1.a.value;
if(a=="")||a==null){
    alert("请输入一个项数 f(大于 3)! ");
    form1.a.focus();
    return;
}else if(parseInt(a)<3){
    alert("请输入一个项数 f(大于 3)! ");
    form1.a.select();
    form1.a.focus();
    return;
}form1.submit();
}
</script>

</head>

<body bgcolor="#BFC0B6">
<p align="center"><font color="#FF0000" size="4"><strong>
孪生素数组成的双等差级数</strong></font></p>
<p align="center">&nbsp;</p>
<p align="center">&nbsp;</p>
<p align="center">如果您输入的整数较大, 计算时间将会较
长, 请耐心等待! </p>
<form name="form1" method="post" action="input.asp">
<table width="500" border="0" align="center" cellpadding="
"5" cellspacing="0">
<tr>
<td width="232" align="right">请输入一个项数 f(大于
3): </td>
```



```
        break;
    }
}
if(flag==1){
    pt=i;
    break;
}
}
var array_pi = new Array();
i=0;
var pi
for(pi=2;pi<=pt;pi++)
{ //alert(array_pi[i]);
    flag=1;
    for(j=2;j<=(pi/2);j++)
    {
        if(pi%j==0)
        {
            flag=0;
            break;
        }
    }
    if(flag==1)
    {
        array_pi[i]=pi;
        i++;
    }
}
var d=1;
for(i=0;i<array_pi.length;i++){
    d=d*array_pi[i];
}
```

```
}  
var thea=d*d*pt*pt;  
//alert("pt="+pt+"n="+n);  
form2.thea.value=thea;  
form2.n.value=n;  
form2.pt.value=pt;  
form2.submit();  
}  
</script>
```

第二个文件 (input2.asp):

```
<%  
dim thea,n,pt  
thea=request("thea")  
n=request("n")  
pt=request("pt")  
%>  
<html>  
<head>  
  <meta http-equiv="Content-Type" content="text/html;  
charset=gb2312">  
  <LINK href="/.style.css" type=text/css rel=stylesheet>  
  <title>孪生素数组成的双等差级数</title>  
  <script language="JavaScript" >  
function suborno(){  
  var thea=parseInt("<%=thea%>");  
  var a=form1.a.value;  
  if(a=""||a=null){  
    alert("请输入任一正整数 (大于"+thea+")! ");
```

```

        form1.a.focus();
        return;
    }/*else if(parseInt(a)<thea){
        alert("输入的整数必须是大于"+thea+"的正整数!");
        return;
    }*/form1.submit();
}
</script>

</head>

<body bgcolor="#BFC0B6">
    <p align="center"><font color="#FF0000" size="4"><strong>
孪生素数组成的双等差级数</strong></font></p>
    <p align="center">&nbsp;</p>
    <p align="center">&nbsp;</p>
    <p align="center">如果您输入的整数较大，计算时间将会较
长，请耐心等待！<br>
        <br>
        <a href="input.asp">重输入项数</a></p>
    <form name="form1" method="post" action="sievejs.asp">
        <table width="500" border="0" align="center" cellpadding=
"5" cellspacing="0">
            <tr>
                <td width="232" align="right">请输入任一正整数（大
于<%=thea%>）:</td>
                <td width="248"><input name="a" type="text" id="a">
                    <input name="n" type="hidden" id="n" value="<%=n%>">
                    <input name="pt" type="hidden" id="pt" value="<%=pt%>
"></td>

```

|
| |
 <input type="button" | |

</form>

</body>

</html>

第三个文件 (sievejs.asp):

```
<%a=clng(request.form("a"))
```

```
n=request.form("n")
```

```
pt=request.form("pt")
```

%>

<html>

<head>

```
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=
```

<LINK href="/style.css" type=text/css rel=stylesheet>

<title>孪生素数组成的双等差级数</title>

</head>

<body bgcolor="#BFC0B6">

<div align="center" id="wait div"><font color="#FF0000" size

“否”，并请耐心等待！

```
n=parseInt("<%=n%>");
```

```
document.write("<font color=#FF0000 size='4'>输入的项数 f  
为: </font><font color=#8000FF size=4>" + (n/2) + "<br>");  
var pt=parseInt("<%=pt%>");  
//i=0  
var i1=1;  
//var i2=1;  
ther=0;  
i=0  
//alert(pr);  
for(pi=2;pi<=pr;pi++)  
{//alert(array_pi[i]);  
flag=1;  
for(j=2;j<=(pi/2);j++)  
{  
    if(pi%j==0)  
    {  
        flag=0;  
        break;  
    }  
}  
}  
if(flag==1)  
{  
    //ni=n%pi;  
    //array_ni[i]=ni;  
    array_pi[i]=pi;  
    //array_pi2[i]=pi;  
    //array_ai[i]=a%pi;  
    //array_pi_ni[i]=pi-ni  
    //alert(array_pi[i]);  
    i++;  
}  
}
```

```
}

ther=i;

j=0;
for(i=((2*pr)+1);i<=a;i++){
    array_n[j]=i;
    //alert(array_n[i]);
    j++;
}
d1=1;
d=1;
/*for(i=parseInt(ther/3);i>=2;i--){
    d1=1;
    for(j=i;j>=0;j--){
        d1=d1*array_pi[j];
    }*/
for(i=0;array_pi[i]<=pt;i++){
    d=d*array_pi[i];
    /*if(d1>pr){
        t=i-2;
        d=(d1/array_pi[i])/array_pi[i-1];
        maxk=(array_pi[i-1]-5)/2;
        //theitems=maxk-1;
        break;
    }*/
}
//alert("d="+d+"theitems="+theitems);
maxk=(n/2)-1;
for(i=0;i<=maxk;i++){
    array_k[i]=i;
```

```

    }

    for(i=0;i<array_n.length;i++){
        for(j=0;j<array_k.length;j++){
            flag=1;
            for(thep=0;thep<array_pi.length;thep++){

                if((array_n[i]%array_pi[thep]==(d*array_k[j])%(array_pi[thep]
                ))||(array_n[i]%array_pi[thep]==((d*array_k[j])+2)%(array_pi[thep]
                ))){

                    array_n[i]=0;
                    flag=0;
                    break;

                }

            }
            if(flag==0){ break;}
        }
    }

    xx=0;
    for(i=0;i<array_n.length;i++){
        if(array_n[i]>0){
            xx++;
        }
    }
    //alert("xx="+xx);
    if(xx>0){
        document.write("<br><font color=#0000FF size=3>从集合 N
        中求得的孪生素数组成的双等差级数的组数为: </font>" + xx +
        "<br>");
        document.write("<font color=#0000FF size=3>从集合 N 中求
        得的孪生素数组成的双等差级数为: </font><br>");
    }

```



```
}  
</script>  
</p></body>  
</html>
```

13.3 实筛数据

输入的整数 a 为: 150000 输入的项数 f 为: 4

从集合 N 中求得的孪生素数组成的双等差级数的组数为: 19

从集合 N 中求得的孪生素数组成的双等差级数为:

$x_0=1291$ $y_0=1289$ $x_1=-1019$ $y_1=-1021$
 $x_2=-3329$ $y_2=-3331$ $x_3=-5639$ $y_3=-5641$

$x_0=1453$ $y_0=1451$ $x_1=-857$ $y_1=-859$
 $x_2=-3167$ $y_2=-3169$ $x_3=-5477$ $y_3=-5479$

$x_0=5479$ $y_0=5477$ $x_1=3169$ $y_1=3167$
 $x_2=859$ $y_2=857$ $x_3=-1451$ $y_3=-1453$

$x_0=5641$ $y_0=5639$ $x_1=3331$ $y_1=3329$
 $x_2=1021$ $y_2=1019$ $x_3=-1289$ $y_3=-1291$

$x_0=7591$ $y_0=7589$ $x_1=5281$ $y_1=5279$
 $x_2=2971$ $y_2=2969$ $x_3=661$ $y_3=659$

$x_0=7951$ $y_0=7949$ $x_1=5641$ $y_1=5639$
 $x_2=3331$ $y_2=3329$ $x_3=1021$ $y_3=1019$

$x_0=8863$ $y_0=8861$ $x_1=6553$ $y_1=6551$
 $x_2=4243$ $y_2=4241$ $x_3=1933$ $y_3=1931$

$x_0=11173$ $y_0=11171$ $x_1=8863$ $y_1=8861$

$$x_2=6553 \ y_2=6551 \ x_3=4243 \ y_3=4241$$

$$x_0=21523 \ y_0=21521 \ x_1=19213 \ y_1=19211$$

$$x_2=16903 \ y_2=16901 \ x_3=14593 \ y_3=14591$$

$$x_0=23833 \ y_0=23831 \ x_1=21523 \ y_1=21521$$

$$x_2=19213 \ y_2=19211 \ x_3=16903 \ y_3=16901$$

$$x_0=27481 \ y_0=27479 \ x_1=25171 \ y_1=25169$$

$$x_2=22861 \ y_2=22859 \ x_3=20551 \ y_3=20549$$

$$x_0=28309 \ y_0=28307 \ x_1=25999 \ y_1=25997$$

$$x_2=23689 \ y_2=23687 \ x_3=21379 \ y_3=21377$$

$$x_0=38653 \ y_0=38651 \ x_1=36343 \ y_1=36341$$

$$x_2=34033 \ y_2=34031 \ x_3=31723 \ y_3=31721$$

$$x_0=61333 \ y_0=61331 \ x_1=59023 \ y_1=59021$$

$$x_2=56713 \ y_2=56711 \ x_3=54403 \ y_3=54401$$

$$x_0=71809 \ y_0=71807 \ x_1=69499 \ y_1=69497$$

$$x_2=67189 \ y_2=67187 \ x_3=64879 \ y_3=64877$$

$$x_0=86629 \ y_0=86627 \ x_1=84319 \ y_1=84317$$

$$x_2=82009 \ y_2=82007 \ x_3=79699 \ y_3=79697$$

$$x_0=89821 \ y_0=89819 \ x_1=87511 \ y_1=87509$$

$$x_2=85201 \ y_2=85199 \ x_3=82891 \ y_3=82889$$

$$x_0=129529 \ y_0=129527 \ x_1=127219 \ y_1=127217$$

$$x_2=124909 \ y_2=124907 \ x_3=122599 \ y_3=122597$$

$x_0=131839$ $y_0=131837$ $x_1=129529$ $y_1=129527$
 $x_2=127219$ $y_2=127217$ $x_3=124909$ $y_3=124907$

输入的整数 a 为: 200000 输入的项数 f 为: 5

从集合 N 中求得的孪生素数组成的双等差级数的组数为: 5

从集合 N 中求得的孪生素数组成的双等差级数为:

$x_0=1291$ $y_0=1289$ $x_1=-1019$ $y_1=-1021$
 $x_2=-3329$ $y_2=-3331$ $x_3=-5639$ $y_3=-5641$
 $x_4=-7949$ $y_4=-7951$

$x_0=7951$ $y_0=7949$ $x_1=5641$ $y_1=5639$
 $x_2=3331$ $y_2=3329$ $x_3=1021$ $y_3=1019$
 $x_4=-1289$ $y_4=-1291$

$x_0=11173$ $y_0=11171$ $x_1=8863$ $y_1=8861$
 $x_2=6553$ $y_2=6551$ $x_3=4243$ $y_3=4241$
 $x_4=1933$ $y_4=1931$

$x_0=23833$ $y_0=23831$ $x_1=21523$ $y_1=21521$
 $x_2=19213$ $y_2=19211$ $x_3=16903$ $y_3=16901$
 $x_4=14593$ $y_4=14591$

$x_0=131839$ $y_0=131837$ $x_1=129529$ $y_1=129527$
 $x_2=127219$ $y_2=127217$ $x_3=124909$ $y_3=124907$
 $x_4=122599$ $y_4=122597$

第十四章 递减的素数间隙

d_n 表示相邻素数的差值, 亦即

$$d_n = p_{n+1} - p_n$$

Erdos 和 Turan 证明了符合条件 “ $d_n > d_{n+1}$ ” 的素数有无穷多组。但尚不知符合条件 “ $d_n > d_{n+1} > d_{n+2}$ ” 的素数是否也有无穷多组。本章将讨论这一问题。

14.1 求解证明

设 A 为大于 12000 的任意正整数, 将不超过 A 的全部正整数集合用 E 表示。

以埃氏筛法求得不超过 $A^{1/2}$ 的全部素数集合 P , 并将 P 中元素按数值大小顺序排列如下:

$$P = (p_1, p_2, \dots, p_r)$$

$$2 = p_1 < p_2 < \dots < p_r \leq A^{1/2} \quad (1)$$

将不超过 A 且大于 p_r 的全部正整数集合用 N 表示,

$N = (p_r + 1, p_r + 2, \dots, A)$ 则集合 N 的基数 $|N|$ 为

$$|N| = A - p_r \geq p_r^2 - p_r \quad (2)$$

用筛选方法从集合 N 中分选出必要的子集。

给定筛选条件:

$$g \equiv 1 \pmod{p_1} \quad (3)$$

$$g \equiv 1 \pmod{p_2} \quad (4)$$

$$g \equiv 3 \pmod{p_3} \quad (5)$$

$$g \not\equiv 0 \pmod{p_i}, \quad i = 4, 5, \dots, r \quad (6)$$

$$g \not\equiv 2 \pmod{p_i}, \quad i = 4, 5, \dots, r \quad (7)$$

$$g \not\equiv 6 \pmod{p_i}, \quad i = 4, 5, \dots, r \quad (8)$$

$$g \not\equiv 12 \pmod{p_i}, \quad i = 4, 5, \dots, r \quad (9)$$

g 表示集合 N 中被选元素。

从集合 N 中将同时符合条件 (3) ~ (9) 式的所有元素分选出来, 组成子集 N_B , 再来讨论子集 N_B 的基数 $|N_B|$ (筛函数)。

14.1.1 求证筛函数的下界

被筛集合 N 为自然数列集合, 模数集合 P 中元素为互不相同的素数, 根据第一章的相关公式 (61) 式可知, 基数 $|N_B|$ 的近似估算公式为

$$|N_B| = |N| \prod_{i=1}^r \left(\frac{\alpha_i}{p_i} \right) \quad (10)$$

根据第一章的 (72) 式可知, 基数 $|N_B|$ 的下界计算公式为

$$|N_B| > |N| \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{p_i}{|N|} \right) \left(\frac{\alpha_i}{p_i} \right) \quad (11)$$

式中 α_i 为按照筛选条件所选取的模 p_i 的同余类子集的个数, 下面具体分析确定 α_i 的数值。

当 $i \leq 3$ 时, 由筛选条件 (3), (4), (5) 式可知集合 N 中按模 p_i 只有模 p_i 的一个同余类子集符合筛选条件。故得

$$\alpha_i = 1, \quad i = 1, 2, 3 \quad (12)$$

当 $i > 3$, $p_i \geq p_4 = 7$

数组 0, 2, 6, 12 中的各元素每两两之间对模 p_i 皆不同余,

(6), (7), (8), (9) 式对应于四个不同的同余类子集, 此时, 集合 N 中按模 p_i 只有模 p_i 的 $(p_i - 4)$ 个同余类子集符合筛选条

件, 故得

$$\alpha_i = p_i - 4, \quad i = 4, 5, \dots, r \quad (13)$$

将 (12) 和 (13) 式代入 (10) 式, 可得

$$|N_B| = |N| \prod_{i=1}^3 \left(\frac{1}{p_i}\right) \prod_{j=4}^r \left(\frac{p_j - 4}{p_j}\right) \quad (14)$$

将 (12) 和 (13) 式代入 (11) 式, 可得

$$|N_B| > F_1 |N| \prod_{i=1}^3 \left(\frac{1}{p_i}\right) \prod_{j=4}^r \left(\frac{p_j - 4}{p_j}\right) \quad (15)$$

$$F_1 = \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{p_i}{|N|}\right) > 1 - \frac{1}{|N|} \sum_{i=1}^r p_i \quad (16)$$

由第一章 (77) 式推得

$$\Pi(x) - \Pi\left(\frac{x}{2}\right) < \Pi\left(\frac{x}{2}\right) \quad (17)$$

(17) 式表明数值越大的区域素数分布的密度越小, 由此可得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r p_i &= \sum_{i=1}^4 p_i + \sum_{i=5}^r p_i < \\ 17 + \left(\frac{1}{2}\right)(p_5 + p_r) \{ \Pi(p_r) - 4 \} \end{aligned} \quad (18)$$

根据切比晓夫不等式可知

$$\Pi(p_r) < (6 \ln 2) \frac{p_r}{\ln p_r} \quad (19)$$

将 (19) 代入 (18) 式可得

$$\sum_{i=1}^r p_i < 17 - 2(p_5 + p_r) + \frac{2.08(p_5 + p_r)p_r}{\ln p_r} \quad (20)$$

将 (20) 代入 (16) 式, 可得

$$F_1 > 1 + \frac{2(p_5 + p_r)}{|N|} - \left\{ \frac{17}{|N|} + \frac{2.08(p_5 + p_r)p_r}{|N| \ln p_r} \right\} \quad (21)$$

将 (21) 代入 (15) 式, 可得

$$|N_B| > \left\{ \frac{|N|}{30} + F_2 \right\} \prod_{i=4}^r \left(\frac{p_i - 4}{p_i} \right) \quad (22)$$

$$F_2 = \frac{2(p_5 + p_r)}{30} - \left\{ \frac{17}{30} + \frac{2.08(p_5 + p_r)p_r}{30 \ln p_r} \right\} \quad (23)$$

将 $|N|$ 作以下变换

$$|N| = |N| \{p_{11} / (p_{13} - 4)\} + 6|N| / (p_{13} - 4) \quad (24)$$

$$|N| = |N| \{p_{12} / (p_{14} - 4)\} + 2|N| / (p_{14} - 4) \quad (25)$$

$$|N| = |N| \{p_{13} / (p_{15} - 4)\} + 2|N| / (p_{15} - 4) \quad (26)$$

$$|N| = |N| \{p_{14} / (p_{16} - 4)\} + 6|N| / (p_{16} - 4) \quad (27)$$

$$|N| = |N| \{p_{15} / (p_{17} - 4)\} + 8|N| / (p_{17} - 4) \quad (28)$$

$$|N| = |N| \{p_{16} / (p_{18} - 4)\} + 4|N| / (p_{18} - 4) \quad (29)$$

$$|N| = |N| \{p_{17} / (p_{19} - 4)\} + 4|N| / (p_{19} - 4) \quad (30)$$

$$|N| = |N| \{p_{18} / (p_{20} - 4)\} + 6|N| / (p_{20} - 4) \quad (31)$$

$$|N| = |N| \{p_{19} / (p_{21} - 4)\} + 2|N| / (p_{21} - 4) \quad (32)$$

$$|N| = |N| \{p_{20} / (p_{22} - 4)\} + 4|N| / (p_{22} - 4) \quad (33)$$

$$|N| = |N| \{p_{21} / (p_{23} - 4)\} + 6|N| / (p_{23} - 4) \quad (34)$$

$$|N| = |N| \{p_{22} / (p_{24} - 4)\} + 6|N| / (p_{24} - 4) \quad (35)$$

$$|N| = |N| \{p_{23} / (p_{25} - 4)\} + 10|N| / (p_{25} - 4) \quad (36)$$

$$|N| = |N| \{p_{24} / (p_{26} - 4)\} + 8|N| / (p_{26} - 4) \quad (37)$$

$$|N| = |N| \{p_{25} / (p_{27} - 4)\} + 2|N| / (p_{27} - 4) \quad (38)$$

$$|N| = |N|\{p_{26}/(p_{28}-4)\} + 2|N|/(p_{28}-4) \quad (39)$$

将 (24), (25), ... (39) 式逐次代入右端第一项, 得

$$|N| = |N| \prod_{i=13}^{28} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i - 4} \right) + F_3 \quad (40)$$

$$\begin{aligned} F_3 = & \left(\frac{6|N|}{p_{13}-4} \right) \prod_{i=14}^{28} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i - 4} \right) + \left(\frac{2|N|}{p_{14}-4} \right) \prod_{i=15}^{28} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i - 4} \right) + \\ & \left(\frac{2|N|}{p_{15}-4} \right) \prod_{i=16}^{28} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i - 4} \right) + \left(\frac{6|N|}{p_{16}-4} \right) \prod_{i=17}^{28} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i - 4} \right) + \\ & \left(\frac{8|N|}{p_{17}-4} \right) \prod_{i=18}^{28} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i - 4} \right) + \left(\frac{4|N|}{p_{18}-4} \right) \prod_{i=19}^{28} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i - 4} \right) + \\ & \left(\frac{4|N|}{p_{19}-4} \right) \prod_{i=20}^{28} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i - 4} \right) + \left(\frac{6|N|}{p_{20}-4} \right) \prod_{i=21}^{28} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i - 4} \right) + \\ & \left(\frac{2|N|}{p_{21}-4} \right) \prod_{i=22}^{28} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i - 4} \right) + \left(\frac{4|N|}{p_{22}-4} \right) \prod_{i=23}^{28} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i - 4} \right) + \\ & \left(\frac{6|N|}{p_{23}-4} \right) \prod_{i=24}^{28} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i - 4} \right) + \left(\frac{6|N|}{p_{24}-4} \right) \prod_{i=25}^{28} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i - 4} \right) + \\ & \left(\frac{10|N|}{p_{25}-4} \right) \prod_{i=26}^{28} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i - 4} \right) + \left(\frac{8|N|}{p_{26}-4} \right) \prod_{i=27}^{28} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i - 4} \right) + \\ & \left(\frac{2|N|}{p_{27}-4} \right) \left(\frac{p_{26}}{p_{28}-4} \right) + \frac{2|N|}{p_{28}-4} \end{aligned} \quad (41)$$

将 $p_{12}=37$, $p_{13}=41$, $p_{14}=43$, $p_{15}=47$, $p_{16}=53$, $p_{17}=59$,
 $p_{18}=61$, $p_{19}=67$, $p_{20}=71$, $p_{21}=73$, $p_{22}=79$, $p_{23}=83$,
 $p_{24}=89$, $p_{25}=97$, $p_{26}=101$, $p_{27}=103$, $p_{28}=107$ 代入 (41)
 式, 得

$$F_3 = 0.72|N| \quad (42)$$

将 (42) 代入 (40) 式, 得

$$|N| = |N| \prod_{i=13}^{28} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i - 4} \right) + 0.72 |N| \quad (43)$$

将 (43) 代入 (22) 式, 得

$$|N_B| > \left\{ \frac{|N|}{30} \prod_{i=13}^{28} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i - 4} \right) + F_4 \right\} \prod_{i=4}^r \left(\frac{p_i - 4}{p_i} \right) \quad (44)$$

$$F_4 = \frac{0.72 |N|}{30} + \frac{2(p_5 + p_r)}{30} - \left\{ \frac{17}{30} + \frac{2.08(p_5 + p_r)p_r}{30 \ln p_r} \right\} =$$

$$\frac{0.72 |N| + 2p_r + 5}{30} - \frac{2.08(p_5 + p_r)p_r}{30 \ln p_r} \quad (45)$$

将 (2) 式代入 (45) 式, 得

$$F_4 > \frac{0.72 p_r^2 + 1.28 p_r}{30} - \frac{2.08(p_5 + p_r)p_r}{30 \ln p_r} = F_5 p_r \quad (46)$$

$$F_5 = \frac{0.72 p_r + 1.28}{30} - \frac{2.08(p_5 + p_r)}{30 \ln p_r} \quad (47)$$

$$\frac{dF_5}{dp_r} = \frac{0.72}{30} - \left(\frac{2.08}{30} \right) \left\{ \frac{\ln p_r - (p_5 + p_r)(1/p_r)}{\ln^2 p_r} \right\} =$$

$$\frac{0.72}{30} - \frac{2.08}{30 \ln p_r} + \frac{2.08(p_5 + p_r)}{30 p_r \ln^2 p_r} >$$

$$\frac{0.72}{30} - \frac{2.08}{30 \ln p_r} \quad (48)$$

$$\text{令 } \frac{0.72}{30} - \frac{2.08}{30 \ln p_r} > 0$$

$$\text{得 } p_r > 17.98 \quad (49)$$

将条件 (49) 式代入 (48) 式, 可得

$$\frac{dF_5}{dp_r} > 0 \quad (p_r > 17.98) \quad (50)$$

(50) 式表示, 当 $p_r > 17.98$ 时, F_5 为 p_r 的递增函数。

当 $A \geq 12000$ 时, $p_r \geq 109 > 17.98$

且 $F_5(p_r = 109) = 0.885$ 故得

$$F_5 > 0.88, \quad A \geq 12000 \quad (51)$$

将 (51) 式代入 (46) 式, 得

$$F_4 > 0.88 p_r \quad (52)$$

将 (52) 代入 (44) 式, 可得

$$|N_B| > \left\{ \frac{|N|}{30} \prod_{i=13}^{28} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i - 4} \right) + 0.88 p_r \right\} \prod_{i=4}^r \left(\frac{p_i - 4}{p_i} \right) > \frac{|N|}{30} \prod_{j=13}^{28} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j - 4} \right) \prod_{i=4}^r \left(\frac{p_i - 4}{p_i} \right) \quad (53)$$

将 (2) 式代入 (53) 式, 得

$$|N_B| > \frac{p_r^2 - p_r}{30} \prod_{j=13}^{28} \left(\frac{p_{j-2}}{p_j - 4} \right) \prod_{i=4}^r \left(\frac{p_i - 4}{p_i} \right) \quad (54)$$

$$\text{已知: } p_i - 4 \geq p_{i-2}, \quad i > 28 \quad (55)$$

由 (54) 和 (55) 式可得

$$|N_B| > \left(\frac{p_r^2 - p_r}{30} \right) \left\{ \frac{(p_{11} - 4)(p_{12} - 4)}{p_{11} p_{12}} \right\} \prod_{j=4}^{10} \left(\frac{p_j - 4}{p_j} \right) \prod_{i=13}^r \left(\frac{p_{i-2}}{p_i} \right) = \left(\frac{p_r^2 - p_r}{30} \right) \left(\frac{(p_{11} - 4)(p_{12} - 4)}{p_{r-1} p_r} \right) \prod_{i=4}^{10} \left(\frac{p_i - 4}{p_i} \right) \quad (56)$$

已知, $p_r \geq p_{r-1} + 2$ 故得

$$|N_B| > \left\{ \frac{(p_{11} - 4)(p_{12} - 4)}{30} \right\} \prod_{i=4}^{10} \left(\frac{p_i - 4}{p_i} \right) \quad (57)$$

将 $p_4 = 7$, $p_5 = 11$, $p_6 = 13$, $p_7 = 17$, $p_8 = 19$, $p_9 = 23$

$P_{10} = 29$, $P_{11} = 31$, $P_{12} = 37$ 代入 (57) 式可得

$$|N_B| > 2.41 \quad (58)$$

14.1.2 通过子集 N_B 求解

从集合 N_B 中任取一元素 x_0 再引入参量:

$$x_2 = x_0 - 2 \quad (59)$$

$$x_6 = x_0 - 6 \quad (60)$$

$$x_{12} = x_0 - 12 \quad (61)$$

以集合 P 中各元素为模数求得同余式组:

$$x_0 \equiv x_{0i} \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$x_2 \equiv x_{2i} \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$x_6 \equiv x_{6i} \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$x_{12} \equiv x_{12i} \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

根据定义式可知

$$x_0 \in E, \quad x_0 > 1 \quad (62)$$

$$x_2 \in E, \quad x_2 > 1 \quad (63)$$

$$x_6 \in E, \quad x_6 > 1 \quad (64)$$

$$x_{12} \in E, \quad x_{12} > 1 \quad (65)$$

由于 $x_0 \in N_B$, 根据筛选条件 (3) ~ (9) 式可知

$$x_{0i} \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (66)$$

$$x_{0i} \neq 2, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (67)$$

$$x_{0i} \neq 6 \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (68)$$

$$x_{0i} \neq 12 \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (69)$$

根据同余式的性质, 由 (59), (60) 和 (61) 式可推得

$$x_{2i} \equiv x_{0i} - 2 \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (70)$$

$$x_{6i} \equiv x_{0i} - 6 \pmod{p_i}, \quad i=1,2,\dots,r \quad (71)$$

$$x_{12i} \equiv x_{0i} - 12 \pmod{p_i}, \quad i=1,2,\dots,r \quad (72)$$

由 (67) 和 (70) 式可知

$$x_{2i} \neq 0, \quad i=1,2,\dots,r \quad (73)$$

由 (68) 式和 (71) 式可知:

$$x_{6i} \neq 0, \quad i=1,2,\dots,r \quad (74)$$

由 (69) 式和 (72) 式可知:

$$x_{12i} \neq 0, \quad i=1,2,\dots,r \quad (75)$$

根据第一章引理 3, 由 (62) 和 (66) 式可知: x_0 为奇素数。

根据第一章引理 3, 由 (63) 式和 (73) 式可知: x_2 为奇素数。

根据第一章引理 3, 由 (64) 式和 (74) 式可知: x_6 为奇素数。

根据第一章引理 3, 由 (65) 式和 (75) 式可知: x_{12} 为奇素数。

再引入参量:

$$x_k = x_0 - k, \quad k=1,3,4,5,7,8,9,10,11 \quad (76)$$

以集合 P 中各元素为模数, 求得同余式组

$$x_k \equiv x_{ki} \pmod{p_i}, \quad i=1,2,\dots,r$$

$$k \equiv k_i \pmod{p_i}, \quad i=1,2,\dots,r$$

根据同余式的性质, 由 (76) 式推得

$$x_{ki} \equiv x_{0i} - k_i \pmod{p_i}, \quad i=1,2,\dots,r \quad (77)$$

$$k=1,3,4,5,7,8,9,10,11$$

当 $i=1$ 时, $p_1=2$

$$x_{k1} \equiv x_{01} - k_1 \pmod{p_1} \quad (78)$$

由筛选条件 (3) 式知

$$x_{01}=1 \quad (79)$$

$$\text{另有 } k_1=1, \quad k=1,3,5,7,9,11 \quad (80)$$

由 (78), (79) 和 (80) 式, 可知

$$x_{k1} = 0, \quad k = 1, 3, 5, 7, 9, 11 \quad (81)$$

(81) 式表示, x_k ($k = 1, 3, 5, 7, 9, 11$) 为复合数。

当 $i = 2$ 时, $p_2 = 3$

$$x_{k2} \equiv x_{02} - k_2 \pmod{p_2} \quad (82)$$

由筛选条件 (4) 式知

$$x_{02} = 1 \quad (83)$$

$$\text{另有 } k_2 = 1, \quad k = 4, 10 \quad (84)$$

由 (82), (83) 和 (84) 式, 可知

$$x_{k2} = 0, \quad k = 4, 10 \quad (85)$$

(85) 式表示, x_k ($k = 4, 10$) 为复合数。

当 $i = 3$ 时, $p_3 = 5$

$$x_{k3} \equiv x_{03} - k_3 \pmod{p_3} \quad (86)$$

由筛选条件 (5) 式可知

$$x_{03} = 3 \quad (87)$$

$$\text{另有 } k_3 = 3, \quad k = 8 \quad (88)$$

由 (86), (87) 和 (88) 式, 可知

$$x_{k3} = 0, \quad k = 8 \quad (89)$$

(89) 式表示, x_k ($k = 8$) 为复合数。

综合 (81) 式 (85) 式和 (89) 式可知

参量 x_k ($k = 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11$) 全是复合数。

由 (76) 式可知, 这 9 个复合数正是介于 x_0 和 x_2 和 x_6 和 x_{12} 之间的 9 个整数。所以, x_0, x_2, x_6, x_{12} 为四个相邻的素数。

由 (66), (73), (74) 和 (75) 式可知, x_0, x_2, x_6, x_{12} 这四个素数都大于 p_r 。根据定义, p_r 是不超过 $A^{1/2}$ 的最大素数, 故

知这四个素数都大于 $A^{1/2}$ 。

由 (59), (60) 和 (61) 式可知

$$x_0 - x_2 = 2 \quad (90)$$

$$x_2 - x_6 = 4 \quad (91)$$

$$x_6 - x_{12} = 6 \quad (92)$$

由 (90), (91), (92) 式可见, 这四个相邻素数之间的三个间隙, 随着素数数值的增大而减小, 故构成“素数的连续三间隙递减组合”。

因为 x_0 为集合 N_B 中任一元素, 所以集合 N_B 中每个元素都对应一个“素数的连续三间隙递减组合”。由此, 根据 (58) 式可得定律如下:

素数三间隙递减组合定律: 对大于 12000 的任意正整数 A 而言, 在区间 $(A^{1/2}, A)$ 内至少有两个“素数的连续三间隙递减组合”。

14.2 素数三间隙递减组合的无限性

根据前节得出的定律可知, 在区间 $(A^{1/2}, A)$ ($A > 12000$) 内至少有两个“素数的连续三间隙递减组合”, 同理在区间 (A, A^2) 内至少也有两个“素数的连续三间隙递减组合”, 在区间 (A^2, A^4) 内还至少有两个“素数的连续三间隙递减组合”……依次类推, 当 A 的指数趋于无穷时, “素数的连续三间隙递减组合”必定有无穷多个。

14.3 求解程序

下面是用 ASP 写的求解程序, 包括输入界面和运算显示两个文件:

第一个文件 (input.asp):

```
<html>
<head>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=
gb2312">
<LINK href="/.style.css" type=text/css rel=stylesheet>
<title>递减的素数间隙</title>
<script language="JavaScript" >
function suborno(){
    var a=form1.a.value;
    if(a=="'||a==null){
        alert("请输入一个数字 (100 以上)! ");
        return;
    }else if(parseInt(a)<100){
        alert("输入的数字必须大于 100! ");
        return;
    } form1.submit();
}
</script>

</head>

<body bgcolor="#BFC0B6">
<p align="center"><font color="#FF0000" size="4"><strong>
递减的素数间隙求解程序</strong></font></p>
<p align="center">&nbsp;</p>
<p align="center">&nbsp;</p>
<p align="center">如果您输入的数较大, 计算时间将会较长,
请耐心等待! </p>
<form name="form1" method="post" action="sievejs.asp">
```



```
<title>递减的素数间隙</title>
</head>
<body
bgcolor="#BFC0B6"><br>&nbsp;<br>&nbsp;<br>&nbsp;<br>
  <div align="center" id="wait_div"><font color="#FF0000"
size="4"><strong>如果出现提示“.....是否取消该脚本？”，请点击
“否”，并请耐心等待！</strong></font></div>
  <div align="center" id="wait2_div" style="display:none"><font
color="#FF0000" size="5"><strong>递减的素数间隙求解运算结果
</strong></font></div>
  <p><script language="JavaScript">
var a, i, pi, j, flag, ni, n, m, x, y, k, pr, ther, num1, num2, num3;
//var array_ni = new Array();
var array_pi = new Array();
//var array_pi2 = new Array();
var array_a = new Array();
//var array_ai = new Array();
//var array_hi = new Array();
//var array_pi_ni = new Array()
//a=clng(request.form("a"))
num1=0;
num2=0;
num3=0;
a=parseInt("<%=a%>");
if (a<100)
{
    document.write("输入错误！");
} else {
    document.write("<font color=#FF0000 size='4'>输入的数 a 为:
</font><font color=#8000FF size=4>"+a+"</font><br>");
    //n=parseInt(a/2);
```

```
//alert(n);
pr=Math.sqrt(a);
pr=parseInt(pr);
//i=0
var i1=1;
//var i2=1;
ther=0;
i=0
//alert(pr);
for(pi=2;pi<=pr;pi++)
{
    //alert(array_pi[i]);
    flag=1;
    for(j=2;j<=(pi/2);j++)
    {
        if(pi%j==0)
        {
            flag=0;
            break;
        }
    }
    if(flag==1)
    {
        //ni=n%pi;
        //array_ni[i]=ni;
        array_pi[i]=pi;
        //array_pi2[i]=pi;
        //array_ai[i]=a%pi;
        //array_pi_ni[i]=pi-ni
        //if(i<6)
        //alert(array_pi[i]);
        //document.write(array_pi[i]+"&nbsp;");
    }
}
```

```

        i++;
    }
}
//document.write("<br>");
//alert(array_pi[i-1]);
ther=i;
//alert(a-array_pi[ther-1]);

for(i=(array_pi[ther-1]+1),j=0;i<=a;i++,j++){
    array_a[j]=i;
    //if(i<450)
    //alert(array_a[i]);
    //document.write(array_a[i]+"&nbsp;");
    //alert(array_n[i]);
} //alert(array_a.length);
//document.write("<br>");
theflag=0;
for(i=0;i<array_a.length;i++)
{
    theflag=0;
    if((array_a[i]%array_pi[0]==1)&&(array_a[i]%array_
pi[1]==1)&&(array_a[i]%array_pi[2]==3)){
        //alert(array_pi[0]+"          "+array_pi[1]+"
"+array_pi[2]+" "+array_pi[3]);
        //alert(array_a[i]);
        theflag=1;
    }
    if(theflag==1){
        for(k=3;k<array_pi.length;k++){

            if((array_a[i]%array_pi[k]==0)||((array_a[i]%array_pi[
k]==2)||((array_a[i]%array_pi[k]==6)||((array_a[i]%array_pi[k])==(1

```

```

2%array_pi[k]))){
            array_a[i]=0;
            break;
        }
    }
    }else{
        array_a[i]=0;
    }
}
x=0;
for(i=0;i<array_a.length;i++){
    if(array_a[i]>0){
        //document.write(array_a[i]+"&nbsp;");
        x++;
    }
    //alert(array_n[i]);
}

```

document.write("
从集合 N
中求得的解的组数为: " + x + "
");

```

if(x>0){
    document.write("<font color=#0000FF size=3>从集  
合 N 中求得的解为: </font><br>");
    var astr=new String(a);
    var thelength=astr.length;
    var x11,x22,x33,x44;
    m=1;
    for(i=0;i<array_a.length;i++)
    {
        switch(array_a[i])
        {

```

```
case 0: break;
default:
    x1=array_a[i];
    x2=array_a[i]-2;
    x3=array_a[i]-6;
    x4=array_a[i]-12;

    x11=new String(x1);
    for(var iii=x11.length;iii<thelength;iii++){
        x11="0"+" "+x11;
    }
    x22=new String(x2);
    for(var iii=x22.length;iii<thelength;iii++){
        x22="0"+" "+x22;
    }
    x33=new String(x3);
    for(var iii=x33.length;iii<thelength;iii++){
        x33="0"+" "+x33;
    }
    x44=new String(x4);
    for(var iii=x44.length;iii<thelength;iii++){
        x44="0"+" "+x44;
    }
    document.write("<font                                size='4'
class='parametercss'>x</font>0="+x11+"&nbsp;&nbsp;&nbsp;<font
size='4'
class='parametercss'>x</font>2="+x22+"&nbsp;&nbsp;&nbsp;<font
size='4'
class='parametercss'>x</font>6="+x33+"&nbsp;&nbsp;&nbsp;<font
size='4' class='parametercss'>x</font>12="+x44);
    if(m%1==0)
```

```
        {
            document.write("<br>");

        }
        m=m+1;
    }

}

document.all("wait_div").style.display="none";
document.all("wait2_div").style.display="";
}
</script>
</p></body>
</html>
```

14.4 实筛数据

输入的数 a 为: 10000

从集合 N 中求得的解的组数为: 9

从集合 N 中求得的解为:

```
x0=00283 x2=00281 x6=00277 x12=00271
x0=01303 x2=01301 x6=01297 x12=01291
x0=01873 x2=01871 x6=01867 x12=01861
x0=02143 x2=02141 x6=02137 x12=02131
x0=02383 x2=02381 x6=02377 x12=02371
x0=02803 x2=02801 x6=02797 x12=02791
x0=05443 x2=05441 x6=05437 x12=05431
x0=05653 x2=05651 x6=05647 x12=05641
```

$x_0=09013$ $x_2=09011$ $x_6=09007$ $x_{12}=09001$

输入的数 a 为: 100000

从集合 N 中求得的解的组数为: 35

从集合 N 中求得的解为:

$x_0=001303$ $x_2=001301$ $x_6=001297$ $x_{12}=001291$
 $x_0=001873$ $x_2=001871$ $x_6=001867$ $x_{12}=001861$
 $x_0=002143$ $x_2=002141$ $x_6=002137$ $x_{12}=002131$
 $x_0=002383$ $x_2=002381$ $x_6=002377$ $x_{12}=002371$
 $x_0=002803$ $x_2=002801$ $x_6=002797$ $x_{12}=002791$
 $x_0=005443$ $x_2=005441$ $x_6=005437$ $x_{12}=005431$
 $x_0=005653$ $x_2=005651$ $x_6=005647$ $x_{12}=005641$
 $x_0=009013$ $x_2=009011$ $x_6=009007$ $x_{12}=009001$
 $x_0=011833$ $x_2=011831$ $x_6=011827$ $x_{12}=011821$
 $x_0=013693$ $x_2=013691$ $x_6=013687$ $x_{12}=013681$
 $x_0=014563$ $x_2=014561$ $x_6=014557$ $x_{12}=014551$
 $x_0=018133$ $x_2=018131$ $x_6=018127$ $x_{12}=018121$
 $x_0=018313$ $x_2=018311$ $x_6=018307$ $x_{12}=018301$
 $x_0=021493$ $x_2=021491$ $x_6=021487$ $x_{12}=021481$
 $x_0=027283$ $x_2=027281$ $x_6=027277$ $x_{12}=027271$
 $x_0=035533$ $x_2=035531$ $x_6=035527$ $x_{12}=035521$
 $x_0=036793$ $x_2=036791$ $x_6=036787$ $x_{12}=036781$
 $x_0=037573$ $x_2=037571$ $x_6=037567$ $x_{12}=037561$
 $x_0=041233$ $x_2=041231$ $x_6=041227$ $x_{12}=041221$
 $x_0=042463$ $x_2=042461$ $x_6=042457$ $x_{12}=042451$
 $x_0=050593$ $x_2=050591$ $x_6=050587$ $x_{12}=050581$
 $x_0=055933$ $x_2=055931$ $x_6=055927$ $x_{12}=055921$
 $x_0=057793$ $x_2=057791$ $x_6=057787$ $x_{12}=057781$
 $x_0=062143$ $x_2=062141$ $x_6=062137$ $x_{12}=062131$
 $x_0=070003$ $x_2=070001$ $x_6=069997$ $x_{12}=069991$
 $x_0=070123$ $x_2=070121$ $x_6=070117$ $x_{12}=070111$

x0=076003 x2=076001 x6=075997 x12=075991
x0=079633 x2=079631 x6=079627 x12=079621
x0=080683 x2=080681 x6=080677 x12=080671
x0=083233 x2=083231 x6=083227 x12=083221
x0=085093 x2=085091 x6=085087 x12=085081
x0=088663 x2=088661 x6=088657 x12=088651
x0=088813 x2=088811 x6=088807 x12=088801
x0=091813 x2=091811 x6=091807 x12=091801
x0=093493 x2=093491 x6=093487 x12=093481

输入的数 a 为: 200000

从集合 N 中求得的解的组数为: 57

集合 N 中求得的解为:

x0=001303 x2=001301 x6=001297 x12=001291
x0=001873 x2=001871 x6=001867 x12=001861
x0=002143 x2=002141 x6=002137 x12=002131
x0=002383 x2=002381 x6=002377 x12=002371
x0=002803 x2=002801 x6=002797 x12=002791
x0=005443 x2=005441 x6=005437 x12=005431
x0=005653 x2=005651 x6=005647 x12=005641
x0=009013 x2=009011 x6=009007 x12=009001
x0=011833 x2=011831 x6=011827 x12=011821
x0=013693 x2=013691 x6=013687 x12=013681
x0=014563 x2=014561 x6=014557 x12=014551
x0=018133 x2=018131 x6=018127 x12=018121
x0=018313 x2=018311 x6=018307 x12=018301
x0=021493 x2=021491 x6=021487 x12=021481
x0=027283 x2=027281 x6=027277 x12=027271
x0=035533 x2=035531 x6=035527 x12=035521
x0=036793 x2=036791 x6=036787 x12=036781
x0=037573 x2=037571 x6=037567 x12=037561

x0=041233 x2=041231 x6=041227 x12=041221
x0=042463 x2=042461 x6=042457 x12=042451
x0=050593 x2=050591 x6=050587 x12=050581
x0=055933 x2=055931 x6=055927 x12=055921
x0=057793 x2=057791 x6=057787 x12=057781
x0=062143 x2=062141 x6=062137 x12=062131
x0=070003 x2=070001 x6=069997 x12=069991
x0=070123 x2=070121 x6=070117 x12=070111
x0=076003 x2=076001 x6=075997 x12=075991
x0=079633 x2=079631 x6=079627 x12=079621
x0=080683 x2=080681 x6=080677 x12=080671
x0=083233 x2=083231 x6=083227 x12=083221
x0=085093 x2=085091 x6=085087 x12=085081
x0=088663 x2=088661 x6=088657 x12=088651
x0=088813 x2=088811 x6=088807 x12=088801
x0=091813 x2=091811 x6=091807 x12=091801
x0=093493 x2=093491 x6=093487 x12=093481
x0=106543 x2=106541 x6=106537 x12=106531
x0=113023 x2=113021 x6=113017 x12=113011
x0=113173 x2=113171 x6=113167 x12=113161
x0=115783 x2=115781 x6=115777 x12=115771
x0=118903 x2=118901 x6=118897 x12=118891
x0=124303 x2=124301 x6=124297 x12=124291
x0=124783 x2=124781 x6=124777 x12=124771
x0=126493 x2=126491 x6=126487 x12=126481
x0=131713 x2=131711 x6=131707 x12=131701
x0=132763 x2=132761 x6=132757 x12=132751
x0=134593 x2=134591 x6=134587 x12=134581
x0=135283 x2=135281 x6=135277 x12=135271
x0=139303 x2=139301 x6=139297 x12=139291
x0=143833 x2=143831 x6=143827 x12=143821

$x_0=148933$ $x_2=148931$ $x_6=148927$ $x_{12}=148921$

$x_0=150223$ $x_2=150221$ $x_6=150217$ $x_{12}=150211$

$x_0=155383$ $x_2=155381$ $x_6=155377$ $x_{12}=155371$

$x_0=160093$ $x_2=160091$ $x_6=160087$ $x_{12}=160081$

$x_0=163993$ $x_2=163991$ $x_6=163987$ $x_{12}=163981$

$x_0=170353$ $x_2=170351$ $x_6=170347$ $x_{12}=170341$

$x_0=176053$ $x_2=176051$ $x_6=176047$ $x_{12}=176041$

$x_0=177433$ $x_2=177431$ $x_6=177427$ $x_{12}=177421$

第十五章 递增的素数间隙

素数间隙递增组合与素数间隙递减组合目前都只证明了两个间隙组合有无穷多个,三个间隙的情况尚待证明。本章将对这一问题进行讨论。

15.1 求解证明

设 A 为大于 12000 的任意正整数,将不超过 A 的全部正整数集合用 E 表示。以埃氏筛法求得不超过 $A^{1/2}$ 的全部素数集合 P ,并将 P 中元素按数值大小顺序排列如下:

$$P = (p_1, p_2, \dots, p_r)$$

$$2 = p_1 < p_2 < \dots < p_r \leq A^{1/2} \quad (1)$$

将不超过 A 且大于 p_r 的全部正整数集合用 N 表示,
 $N = (p_r + 1, p_r + 2, \dots, A)$, 则集合 N 的基数 $|N|$ 为:

$$|N| = A - p_r \geq p_r^2 - p_r \quad (2)$$

用筛选方法从集合 N 中分选出必要的子集。

给定筛选条件:

$$g \equiv 1 \pmod{p_1} \quad (3)$$

$$g \equiv 2 \pmod{p_2} \quad (4)$$

$$g \equiv 4 \pmod{p_3} \quad (5)$$

$$g \not\equiv 0 \pmod{p_i}, \quad i = 4, 5, \dots, r \quad (6)$$

$$g \not\equiv 6 \pmod{p_i}, \quad i = 4, 5, \dots, r \quad (7)$$

$$g \not\equiv 10 \pmod{p_i}, \quad i = 4, 5, \dots, r \quad (8)$$

$$g \not\equiv 12 \pmod{p_i}, \quad i = 4, 5, \dots, r \quad (9)$$

g 表示集合 N 中被选元素。

从集合 N 中将同时符合 (3) ~ (9) 式条件的所有元素分选出来, 组成子集 N_B , 再来讨论子集 N_B 的基数 $|N_B|$ (筛函数)。

15.1.1 求证筛函数的下界

被筛集合 N 为自然数列集合, 模数集合 P 中元素为互不相同的素数, 根据第一章的相关公式 (61) 式可知, 基数 $|N_B|$ 的近似估算公式为

$$|N_B| = |N| \prod_{i=1}^r \left(\frac{\alpha_i}{p_i} \right) \quad (10)$$

根据第一章的 (72) 式可知, 基数 $|N_B|$ 的下界计算公式为

$$|N_B| > |N| \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{p_i}{|N|} \right) \left(\frac{\alpha_i}{p_i} \right) \quad (11)$$

式中 α_i 为按照筛选条件所选取的模 p_i 的同余类子集的个数, 下面具体分析确定 α_i 的数值。

当 $i \leq 3$ 时, 由筛选条件 (3), (4), (5) 式可知集合 N 中按模 p_i 只有模 p_i 的一个同余类子集符合筛选条件。故得

$$\alpha_i = 1, \quad i = 1, 2, 3 \quad (12)$$

$$\text{当 } i \geq 4, \quad p_i \geq p_4 = 7$$

数组 0, 6, 10, 12 中的各元素每两两之间对模 p_i ($i \geq 4$) 皆不同余。故 (6), (7), (8), (9) 式对应于四个不同的同余类子集, 此时, 集合 N 中按模 p_i 只有模 p_i 的 $(p_i - 4)$ 个同余类子集符合筛选条件, 故得:

$$\alpha_i = p_i - 4, \quad i = 4, 5, \dots, r \quad (13)$$

将 (12) 和 (13) 式代入 (10) 式, 可得

$$|N_B| = |N| \prod_{i=1}^3 \left(\frac{1}{p_i} \right) \prod_{j=4}^r \left(\frac{p_j - 4}{p_j} \right) \quad (14)$$

将 (12) 和 (13) 式代入 (11) 式, 可得

$$|N_B| > F_1 |N| \prod_{i=1}^3 \left(\frac{1}{p_i} \right) \prod_{j=4}^r \left(\frac{p_j - 4}{p_j} \right) \quad (15)$$

$$F_1 = \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{p_i}{|N|} \right) > 1 - \frac{1}{|N|} \sum_{i=1}^r p_i \quad (16)$$

由第一章 (77) 式推得

$$\Pi(x) - \Pi\left(\frac{x}{2}\right) < \Pi\left(\frac{x}{2}\right) \quad (17)$$

(17) 式表明数值越大的区域素数分布的密度越小, 由此可得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r p_i &= \sum_{i=1}^4 p_i + \sum_{i=5}^r p_i < \\ 17 + \left(\frac{1}{2}\right)(p_5 + p_r) \{ \Pi(p_r) - 4 \} \end{aligned} \quad (18)$$

根据切比晓夫不等式可知

$$\Pi(p_r) < (6 \ln 2) \frac{p_r}{\ln p_r} \quad (19)$$

将 (19) 代入 (18) 式可得

$$\sum_{i=1}^r p_i < 17 - 2(p_5 + p_r) + \frac{2.08(p_5 + p_r)p_r}{\ln p_r} \quad (20)$$

将 (20) 代入 (16) 式, 可得

$$F_1 > 1 + \frac{2(p_5 + p_r)}{|N|} - \left\{ \frac{17}{|N|} + \frac{2.08(p_5 + p_r)p_r}{|N| \ln p_r} \right\} \quad (21)$$

将 (21) 代入 (15) 式, 可得:

$$|N_B| > \left\{ \frac{|N|}{30} + F_2 \right\} \prod_{i=4}^r \left(\frac{p_i - 4}{p_i} \right) \quad (22)$$

$$F_2 = \frac{2(p_5 + p_r)}{30} - \left\{ \frac{17}{30} + \frac{2.08(p_5 + p_r)p_r}{30 \ln p_r} \right\} \quad (23)$$

将 $|N|$ 作以下变换:

$$|N| = |N|\{p_{11}/(p_{13}-4)\} + 6|N|/(p_{13}-4) \quad (24)$$

$$|N| = |N|\{p_{12}/(p_{14}-4)\} + 2|N|/(p_{14}-4) \quad (25)$$

$$|N| = |N|\{p_{13}/(p_{15}-4)\} + 2|N|/(p_{15}-4) \quad (26)$$

$$|N| = |N|\{p_{14}/(p_{16}-4)\} + 6|N|/(p_{16}-4) \quad (27)$$

$$|N| = |N|\{p_{15}/(p_{17}-4)\} + 8|N|/(p_{17}-4) \quad (28)$$

$$|N| = |N|\{p_{16}/(p_{18}-4)\} + 4|N|/(p_{18}-4) \quad (29)$$

$$|N| = |N|\{p_{17}/(p_{19}-4)\} + 4|N|/(p_{19}-4) \quad (30)$$

$$|N| = |N|\{p_{18}/(p_{20}-4)\} + 6|N|/(p_{20}-4) \quad (31)$$

$$|N| = |N|\{p_{19}/(p_{21}-4)\} + 2|N|/(p_{21}-4) \quad (32)$$

$$|N| = |N|\{p_{20}/(p_{22}-4)\} + 4|N|/(p_{22}-4) \quad (33)$$

$$|N| = |N|\{p_{21}/(p_{23}-4)\} + 6|N|/(p_{23}-4) \quad (34)$$

$$|N| = |N|\{p_{22}/(p_{24}-4)\} + 6|N|/(p_{24}-4) \quad (35)$$

$$|N| = |N|\{p_{23}/(p_{25}-4)\} + 10|N|/(p_{25}-4) \quad (36)$$

$$|N| = |N|\{p_{24}/(p_{26}-4)\} + 8|N|/(p_{26}-4) \quad (37)$$

$$|N| = |N|\{p_{25}/(p_{27}-4)\} + 2|N|/(p_{27}-4) \quad (38)$$

$$|N| = |N|\{p_{26}/(p_{28}-4)\} + 2|N|/(p_{28}-4) \quad (39)$$

将 (24) ~ (39) 式逐次代入右端第一项, 得

$$|N| = |N| \prod_{i=13}^{28} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i - 4} \right) + F_3 \quad (40)$$

$$\begin{aligned}
F_3 = & \left(\frac{6|N|}{p_{13}-4}\right) \prod_{i=14}^{28} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i-4}\right) + \left(\frac{2|N|}{p_{14}-4}\right) \prod_{i=15}^{28} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i-4}\right) + \\
& \left(\frac{2|N|}{p_{15}-4}\right) \prod_{i=16}^{28} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i-4}\right) + \left(\frac{6|N|}{p_{16}-4}\right) \prod_{i=17}^{28} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i-4}\right) + \\
& \left(\frac{8|N|}{p_{17}-4}\right) \prod_{i=18}^{28} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i-4}\right) + \left(\frac{4|N|}{p_{18}-4}\right) \prod_{i=19}^{28} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i-4}\right) + \\
& \left(\frac{4|N|}{p_{19}-4}\right) \prod_{i=20}^{28} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i-4}\right) + \left(\frac{6|N|}{p_{20}-4}\right) \prod_{i=21}^{28} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i-4}\right) + \\
& \left(\frac{2|N|}{p_{21}-4}\right) \prod_{i=22}^{28} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i-4}\right) + \left(\frac{4|N|}{p_{22}-4}\right) \prod_{i=23}^{28} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i-4}\right) + \\
& \left(\frac{6|N|}{p_{23}-4}\right) \prod_{i=24}^{28} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i-4}\right) + \left(\frac{6|N|}{p_{24}-4}\right) \prod_{i=25}^{28} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i-4}\right) + \\
& \left(\frac{10|N|}{p_{25}-4}\right) \prod_{i=26}^{28} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i-4}\right) + \left(\frac{8|N|}{p_{26}-4}\right) \prod_{i=27}^{28} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i-4}\right) + \\
& \left(\frac{2|N|}{p_{27}-4}\right) \left(\frac{p_{26}}{p_{28}-4}\right) + \frac{2|N|}{p_{28}-4} \quad (41)
\end{aligned}$$

将 $P_{12}=37$, $P_{13}=41$, $P_{14}=43$, $P_{15}=47$, $P_{16}=53$, $P_{17}=59$,
 $P_{18}=61$, $P_{19}=67$, $P_{20}=71$, $P_{21}=73$, $P_{22}=79$, $P_{23}=83$,
 $P_{24}=89$, $P_{25}=97$, $P_{26}=101$, $P_{27}=103$

$P_{28}=107$ 代入 (41) 式, 得

$$F_3 = 0.72|N| \quad (42)$$

将 (42) 代入 (40) 式, 得

$$|N| = |N| \prod_{i=13}^{28} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i-4}\right) + 0.72|N| \quad (43)$$

将 (43) 代入 (22) 式, 得

$$|N_B| > \left\{ \frac{|N|}{30} \prod_{i=13}^{28} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i - 4} \right) + F_4 \right\} \prod_{i=4}^r \left(\frac{p_i - 4}{p_i} \right) \quad (44)$$

$$F_4 = \frac{0.72|N|}{30} + \frac{2(p_5 + p_r)}{30} - \left\{ \frac{17}{30} + \frac{2.08(p_5 + p_r)p_r}{30 \ln p_r} \right\} \quad (45)$$

将 (2) 式代入 (45) 式, 得

$$F_4 \geq \frac{0.72p_r^2 + 1.28p_r + 5}{30} - \frac{2.08(p_5 + p_r)p_r}{30 \ln p_r} > F_5 p_r \quad (46)$$

$$F_5 = \frac{0.72p_r + 1.28}{30} - \frac{2.08(p_5 + p_r)}{30 \ln p_r} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \frac{dF_5}{dp_r} &= \frac{0.72}{30} - \left(\frac{2.08}{30} \right) \left\{ \frac{\ln p_r - (p_5 + p_r)(1/p_r)}{\ln^2 p_r} \right\} = \\ &= \frac{0.72}{30} - \frac{2.08}{30 \ln p_r} + \frac{2.08(p_5 + p_r)}{30 p_r \ln^2 p_r} > \\ &= \frac{0.72}{30} - \frac{2.08}{30 \ln p_r} \end{aligned} \quad (48)$$

$$\text{令 } \frac{0.72}{30} - \frac{2.08}{30 \ln p_r} > 0$$

$$\text{得: } p_r > 17.98 \quad (49)$$

将条件 (49) 式代入 (48) 式, 可得

$$\frac{dF_5}{dp_r} > 0, \quad p_r > 17.98 \quad (50)$$

(50) 式表示, 当 $p_r > 17.98$ 时, F_5 为 p_r 的递增函数。

当 $A \geq 12000$ 时, $p_r \geq 109 > 17.98$

且 $F_5(p_r = 109) = 0.885$ 故得

$$F_5 > 0.88, \quad A \geq 12000 \quad (51)$$

将 (51) 式代入 (46) 式, 得

$$F_4 > 0.88p_r \quad (52)$$

将 (52) 式代入 (44) 式, 可得

$$|N_B| > \left\{ \frac{|N|}{30} \prod_{i=13}^{28} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i - 4} \right) + 0.88p_r \right\} \prod_{i=4}^r \left(\frac{p_i - 4}{p_i} \right) > \frac{|N|}{30} \prod_{i=13}^{28} \left(\frac{p_{i-2}}{p_i - 4} \right) \prod_{j=4}^r \left(\frac{p_j - 4}{p_j} \right) \quad (53)$$

$$\text{已知: } p_j - 4 \geq p_{j-2} \quad (j > 28) \quad (54)$$

由 (53) 和 (54) 式可得

$$|N_B| > \frac{|N|}{30} \prod_{j=4}^{12} \left(\frac{p_j - 4}{p_j} \right) \prod_{i=13}^r \left(\frac{p_{i-2}}{p_i} \right) = \left(\frac{|N|}{30} \right) \left(\frac{p_{11}p_{12}}{p_r p_{r-1}} \right) \prod_{j=4}^{12} \left(\frac{p_j - 4}{p_j} \right) \quad (55)$$

将 (2) 式代入 (55) 式, 可得

$$|N_B| > \left(\frac{p_r^2 - p_r}{30} \right) \left(\frac{p_{11}p_{12}}{p_r p_{r-1}} \right) \prod_{j=4}^{12} \left(\frac{p_j - 4}{p_j} \right) \quad (56)$$

已知, $p_r \geq p_{r-1} + 2$ 故得

$$|N_B| > \left\{ \frac{(p_{11} - 4)(p_{12} - 4)}{30} \right\} \prod_{i=4}^{10} \left(\frac{p_i - 4}{p_i} \right) \quad (57)$$

将 $P_4 = 7$, $P_5 = 11$, $P_6 = 13$, $P_7 = 17$, $P_8 = 19$, $P_9 = 23$, $P_{10} = 29$, $P_{11} = 31$, $P_{12} = 37$ 代入 (57) 式可得

$$|N_B| > 2.4 \quad (58)$$

15.1.2 通过子集 N_B 求解

从集合 N_B 中任取一元素 x_0 再引入参量

$$x_k = x_0 - k, \quad k = 1, 2, \dots, 12 \quad (59)$$

以集合 P 中各元素为模数求得同余式组

$$x_k \equiv x_{ki} \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (60)$$

$$k = 1, 2, \dots, 12$$

$$x_0 \equiv x_{0i} \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (61)$$

$$k \equiv k_i \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (62)$$

根据定义式可知

$$x_0 \in E \quad x_0 > 1 \quad (63)$$

$$x_k \in E, \quad x_k > 1 \quad (64)$$

$$k = 1, 2, \dots, 12$$

由于 $x_0 \in N_B$, 根据筛选条件 (3) ~ (9) 式可知

$$x_{01} = 1 \quad (65)$$

$$x_{02} = 2 \quad (66)$$

$$x_{03} = 4 \quad (67)$$

$$x_{0i} \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (68)$$

$$x_{0i} \not\equiv 6 \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (69)$$

$$x_{0i} \not\equiv 10 \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (70)$$

$$x_{0i} \not\equiv 12 \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (71)$$

根据同余式的性质, 由 (59) 式推得

$$x_{ki} \equiv x_{0i} - k_i \pmod{p_i} \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (72)$$

$$k = 1, 2, \dots, 12$$

当 $i = 1$ 时, 由 (72) 式得

$$x_{k1} \equiv x_{01} - k_1 \pmod{p_1} \quad (73)$$

$$k_1 = 1, \quad k = 1, 3, 5, 7, 9, 11 \quad (74)$$

由 (65), (73) 和 (74) 式可知

$$x_{k1} = 0 \quad k = 1, 3, 5, 7, 9, 11 \quad (75)$$

(75) 式表明, x_k ($k = 1, 3, 5, 7, 9, 11$) 为复合数。

当 $i = 2$ 时, 由 (72) 式得

$$x_{k2} \equiv x_{02} - k_2 \pmod{p_2} \quad (76)$$

$$k_2 = 2, \quad k = 2, 8 \quad (77)$$

由 (66), (76) 和 (77) 式可知

$$x_{k2} = 0 \quad k = 2, 8 \quad (78)$$

(78) 式表明, x_k ($k = 2, 8$) 为复合数。

当 $i = 3$ 时, 由 (72) 式得

$$x_{k3} \equiv x_{03} - k_3 \pmod{p_3} \quad (79)$$

$$k_3 = 4, \quad k = 4 \quad (80)$$

由 (67), (79) 和 (80) 式可知:

$$x_{k3} = 0 \quad k = 4 \quad (81)$$

(81) 式表明, x_k ($k = 4$) 为复合数。

综上 (75), (78) 和 (81) 式可知

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_7, x_8, x_9$, 和 x_{11} 都是复合数。

由 (59) 式还可以推得

$$x_{6i} \equiv x_{0i} - 6 \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (82)$$

$$x_{10i} \equiv x_{0i} - 10 \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (83)$$

$$x_{12i} \equiv x_{0i} - 12 \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (84)$$

由 (69) 和 (82) 式可知

$$x_{6i} \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (85)$$

由 (70) 和 (83) 式可知

$$x_{10i} \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (86)$$

由 (71) 和 (84) 式可知

$$x_{12i} \neq 0, \quad i=1,2,\dots,r \quad (87)$$

根据第一章引理 3, 由 (63) 和 (68) 式可知: x_0 为奇素数。

根据第一章引理 3, 由 (64) 和 (85) 式可知: x_6 为奇素数。

根据第一章引理 3, 由 (64) 和 (86) 式可知: x_{10} 为奇素数。

根据第一章引理 3, 由 (64) 和 (87) 式可知: x_{12} 为奇素数。

由 (59) 式可得

$$x_0 - x_6 = 6 \quad (88)$$

$$x_6 - x_{10} = 4 \quad (89)$$

$$x_{10} - x_{12} = 2 \quad (90)$$

由 (87) 式可知, 素数 x_{12} 大于 p_r , 根据定义, p_r 是不超过 $A^{1/2}$ 的最大素数, 故素数 x_{12} 大于 $A^{1/2}$ 。素数 x_0, x_6, x_{10} 都大于 x_{12} , 所以这四个素数都大于 $A^{1/2}$ 。

总结上述结果可知:

一、 x_0, x_6, x_{10}, x_{12} 为四个相邻的素数。

二、该四个相邻素数之间的三个间隙随着素数数值的增大而增大。

三、该四个相邻素数构成区间 $(A^{1/2}, A)$ 内的一个“素数连续三间隙递增组合”。

已知, x_0 为集合 N_B 中任一元素, 所以集合 N_B 中每个元素都对应一个“素数连续三间隙递增组合”。根据 (58) 式可得如下定律:

素数连续三间隙递增组合定律:

对大于 12000 的任意正整数 A 而言, 在区间 $(A^{1/2}, A)$ 内至少有两个“素数连续三间隙递增组合”。

15.2 素数三间隙递增组合的无限性

根据前节所得定律可知, 在区间 $(A^{1/2}, A)$ ($A > 12000$) 内至少有两个“素数连续三间隙递增组合”, 同理在区间 (A, A^2) 内同样有两个或两个以上的“素数连续三间隙递增组合”, 在区间 (A^2, A^4) 内还有至少两个“素数连续三间隙递增组合”……依次类推, 当 A 的指数趋于无穷时, 必定“素数连续三间隙递增组合”有无穷多个。

15.3 求解程序

下面是用 ASP 写的求解程序, 包括输入界面和运算显示两个文件:

第一个文件 (input.asp):

```
<html>
<head>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=
gb2312">
<LINK href="/style.css" type=text/css rel=stylesheet>
<title>递增的素数间隙</title>
<script language="JavaScript" >
function suborno(){
var a=form1.a.value;
if(a=="")||a==null){
    alert("请输入一个数字 (100 以上)! ");
    return;
}else if(parseInt(a)<100){
    alert("输入的数字必须大于 100! ");
    return;
}form1.submit();
```



```
//var array hi = new Array();
```



```
//var array_pi_ni = new Array()
//a=clng(request.form("a"))
num1=0;
num2=0;
num3=0;
a=parseInt("<%=a%>");
if (a<100)
{
    document.write("输入错误！");
} else {
    document.write("<font color=#FF0000 size='4'>输入的数 a 为:
</font><font color=#8000FF size=4>" + a + "</font><br>");
    //n=parseInt(a/2);
    //alert(n);
    pr=Math.sqrt(a);
    pr=parseInt(pr);
    //i=0
    var i1=1;
    //var i2=1;
    ther=0;
    i=0
    //alert(pr);
    for(pi=2;pi<=pr;pi++)
    { //alert(array_pi[i]);
        flag=1;
        for(j=2;j<=(pi/2);j++)
        {
            if(pi%j==0)
            {
                flag=0;
                break;
```

```
    }  
  }  
  if(flag==1)  
  {  
      //ni=n%pi;  
      //array_ni[i]=ni;  
      array_pi[i]=pi;  
      //array_pi2[i]=pi;  
      //array_ai[i]=a%pi;  
      //array_pi_ni[i]=pi-ni  
      //if(i<6)  
      //alert(array_pi[i]);  
      //document.write(array_pi[i]+"&nbsp;");  
      i++;  
  }  
}  
//document.write("<br>");  
//alert(array_pi[i-1]);  
ther=i;  
//alert(a-array_pi[ther-1]);  
  
for(i=(array_pi[ther-1]+1),j=0;i<=a;i++,j++){  
    array_a[j]=i;  
    //if(i<450)  
    //alert(array_a[i]);  
    //document.write(array_a[i]+"&nbsp;");  
    //alert(array_n[i]);  
} //alert(array_a.length);  
//document.write("<br>");  
theflag=0;  
for(i=0;i<array_a.length;i++)
```

```
{
    theflag=0;
    if((array_a[i]%array_pi[0]==1)&&(array_a[i]%array_pi[1]==2)
    )&&(array_a[i]%array_pi[2]==4)){
        //alert(array_pi[0]+" "+array_pi[1]+" "+array_pi[2]+"
"+array_pi[3]);
        //alert(array_a[i]);
        theflag=1;
    }
    if(theflag==1){
        for(k=3;k<array_pi.length;k++){

            if((array_a[i]%array_pi[k]==0)||((array_a[i]%array_pi[k]==6)||
            (array_a[i]%array_pi[k]==(10%array_pi[k]))||((array_a[i]%array_p
            i[k]==(12%array_pi[k])))){
                array_a[i]=0;
                break;
            }
        }
    }else{
        array_a[i]=0;
    }
}
x=0;
for(i=0;i<array_a.length;i++){
    if(array_a[i]>0){
        //document.write(array_a[i]+"&nbsp;");
        x++;
    }
    //alert(array_n[i]);
}
```

document.write("
从集合 N
中求得的解的组数为: " + x + "
");

```
if(x>0){
    document.write("<font color=#0000FF size=3>从集合 N 中求  
得的解为: </font><br>");
```

```
    var astr=new String(a);
```

```
    var thelength=astr.length;
```

```
    var x11,x22,x33,x44;
```

```
    m=1;
```

```
    for(i=0;i<array_a.length;i++)
```

```
    {
```

```
        switch(array_a[i])
```

```
        {
```

```
            case 0: break;
```

```
            default:
```

```
                x1=array_a[i];
```

```
                x2=array_a[i]-6;
```

```
                x3=array_a[i]-10;
```

```
                x4=array_a[i]-12;
```

```
                x11=new String(x1);
```

```
                for(var iii=x11.length;iii<thelength;iii++){
```

```
                    x11="0"+""+x11;
```

```
                }
```

```
                x22=new String(x2);
```

```
                for(var iii=x22.length;iii<thelength;iii++){
```

```
                    x22="0"+""+x22;
```

```
                }
```

```
                x33=new String(x3);
```

```
                for(var iii=x33.length;iii<thelength;iii++){
```

```
                    x33="0"+""+x33;
```

```
                }
```

```

        x44=new String(x4);
        for(var iii=x44.length;iii<thelength;iii++){
            x44="0"+" "+x44;
        }
        document.write("<font size='4' class='parametercss'
>x</font>0="+x11+"&nbsp;&nbsp;&nbsp;<font size='4' class='parametercss'
>x</font>6="+x22+"&nbsp;&nbsp;&nbsp;<font size='4' class='parametercss'
>x</font>10="+x33+"&nbsp;&nbsp;&nbsp;<font size='4' class='parametercss'
>x</font>12="+x44);
        if(m%1==0)
        {
            document.write("<br>");
        }
        m=m+1;
    }
}
}

document.all("wait_div").style.display="none";
document.all("wait2_div").style.display="";
}
</script>
</p></body>
</html>

```

15.4 实筛数据

输入的数 a 为: 10000

从集合 N 中求得的解的组数为: 12

从集合 N 中求得的解为:

```
x0=00239 x6=00233 x10=00229 x12=00227
x0=00359 x6=00353 x10=00349 x12=00347
x0=01289 x6=01283 x10=01279 x12=01277
x0=01439 x6=01433 x10=01429 x12=01427
x0=01499 x6=01493 x10=01489 x12=01487
x0=01619 x6=01613 x10=01609 x12=01607
x0=02699 x6=02693 x10=02689 x12=02687
x0=03539 x6=03533 x10=03529 x12=03527
x0=03929 x6=03923 x10=03919 x12=03917
x0=04139 x6=04133 x10=04129 x12=04127
x0=04649 x6=04643 x10=04639 x12=04637
x0=04799 x6=04793 x10=04789 x12=04787
```

输入的数 a 为: 100000

从集合 N 中求得的解的组数为: 37

从集合 N 中求得的解为:

```
x0=000359 x6=000353 x10=000349 x12=000347
x0=001289 x6=001283 x10=001279 x12=001277
x0=001439 x6=001433 x10=001429 x12=001427
x0=001499 x6=001493 x10=001489 x12=001487
x0=001619 x6=001613 x10=001609 x12=001607
x0=002699 x6=002693 x10=002689 x12=002687
x0=003539 x6=003533 x10=003529 x12=003527
x0=003929 x6=003923 x10=003919 x12=003917
x0=004139 x6=004133 x10=004129 x12=004127
x0=004649 x6=004643 x10=004639 x12=004637
x0=004799 x6=004793 x10=004789 x12=004787
x0=011789 x6=011783 x10=011779 x12=011777
x0=012119 x6=012113 x10=012109 x12=012107
x0=014639 x6=014633 x10=014629 x12=014627
```

x0=020759 x6=020753 x10=020749 x12=020747
x0=021569 x6=021563 x10=021559 x12=021557
x0=025589 x6=025583 x10=025579 x12=025577
x0=027749 x6=027743 x10=027739 x12=027737
x0=028289 x6=028283 x10=028279 x12=028277
x0=031259 x6=031253 x10=031249 x12=031247
x0=032069 x6=032063 x10=032059 x12=032057
x0=032309 x6=032303 x10=032299 x12=032297
x0=033359 x6=033353 x10=033349 x12=033347
x0=033629 x6=033623 x10=033619 x12=033617
x0=036479 x6=036473 x10=036469 x12=036467
x0=038459 x6=038453 x10=038449 x12=038447
x0=039239 x6=039233 x10=039229 x12=039227
x0=041189 x6=041183 x10=041179 x12=041177
x0=044279 x6=044273 x10=044269 x12=044267
x0=055829 x6=055823 x10=055819 x12=055817
x0=068219 x6=068213 x10=068209 x12=068207
x0=068909 x6=068903 x10=068899 x12=068897
x0=071339 x6=071333 x10=071329 x12=071327
x0=077249 x6=077243 x10=077239 x12=077237
x0=080789 x6=080783 x10=080779 x12=080777
x0=097379 x6=097373 x10=097369 x12=097367
x0=099719 x6=099713 x10=099709 x12=099707

输入的数 a 为: 200000

从集合 N 中求得的解的组数为: 51

从集合 N 中求得的解为:

x0=001289 x6=001283 x10=001279 x12=001277
x0=001439 x6=001433 x10=001429 x12=001427
x0=001499 x6=001493 x10=001489 x12=001487
x0=001619 x6=001613 x10=001609 x12=001607

x0=002699 x6=002693 x10=002689 x12=002687
x0=003539 x6=003533 x10=003529 x12=003527
x0=003929 x6=003923 x10=003919 x12=003917
x0=004139 x6=004133 x10=004129 x12=004127
x0=004649 x6=004643 x10=004639 x12=004637
x0=004799 x6=004793 x10=004789 x12=004787
x0=011789 x6=011783 x10=011779 x12=011777
x0=012119 x6=012113 x10=012109 x12=012107
x0=014639 x6=014633 x10=014629 x12=014627
x0=020759 x6=020753 x10=020749 x12=020747
x0=021569 x6=021563 x10=021559 x12=021557
x0=025589 x6=025583 x10=025579 x12=025577
x0=027749 x6=027743 x10=027739 x12=027737
x0=028289 x6=028283 x10=028279 x12=028277
x0=031259 x6=031253 x10=031249 x12=031247
x0=032069 x6=032063 x10=032059 x12=032057
x0=032309 x6=032303 x10=032299 x12=032297
x0=033359 x6=033353 x10=033349 x12=033347
x0=033629 x6=033623 x10=033619 x12=033617
x0=036479 x6=036473 x10=036469 x12=036467
x0=038459 x6=038453 x10=038449 x12=038447
x0=039239 x6=039233 x10=039229 x12=039227
x0=041189 x6=041183 x10=041179 x12=041177
x0=044279 x6=044273 x10=044269 x12=044267
x0=055829 x6=055823 x10=055819 x12=055817
x0=068219 x6=068213 x10=068209 x12=068207
x0=068909 x6=068903 x10=068899 x12=068897
x0=071339 x6=071333 x10=071329 x12=071327
x0=077249 x6=077243 x10=077239 x12=077237
x0=080789 x6=080783 x10=080779 x12=080777
x0=097379 x6=097373 x10=097369 x12=097367

x0=099719 x6=099713 x10=099709 x12=099707
x0=113159 x6=113153 x10=113149 x12=113147
x0=118259 x6=118253 x10=118249 x12=118247
x0=122039 x6=122033 x10=122029 x12=122027
x0=122399 x6=122393 x10=122389 x12=122387
x0=124349 x6=124343 x10=124339 x12=124337
x0=128669 x6=128663 x10=128659 x12=128657
x0=129539 x6=129533 x10=129529 x12=129527
x0=152429 x6=152423 x10=152419 x12=152417
x0=165719 x6=165713 x10=165709 x12=165707
x0=179909 x6=179903 x10=179899 x12=179897
x0=183509 x6=183503 x10=183499 x12=183497
x0=187139 x6=187133 x10=187129 x12=187127
x0=191459 x6=191453 x10=191449 x12=191447
x0=197969 x6=197963 x10=197959 x12=197957
x0=198839 x6=198833 x10=198829 x12=198827

第十六章 哥德巴赫猜想第二证法

关于偶数的哥德巴赫猜想这一命题,还有区别于第二章的一种求证方法,表述如下。

16.1 求解证明

设 A 为大于 12×10^4 的任意大偶数,将不超过 A 的全部正整数集合用 E 表示,则集合 E 的基数 $|E|$ 等于 A , 即

$$|E| = A \quad (1)$$

以埃氏筛法求得不超过 $A^{1/2}$ 的全部素数集合 P , 并将集合 P 中元素按数值大小顺序排列如下:

$$P = (p_1, p_2, \dots, p_r)$$

$$2 = p_1 < p_2 < \dots < p_r \leq A^{1/2} \quad (2)$$

以集合 P 中各元素为模数求得同余式组:

$$A \equiv A_i \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (3)$$

A_i 为非负的最小剩余。

A 为偶数, 必可用下式表述:

$$A = 2n \quad n \text{ 为正整数} \quad (4)$$

将不超过 n 的全部正整数集合用 N 表示, 则集合 N 的基数 $|N|$ 等于 n

$$|N| = n \quad (5)$$

用筛选方法从集合 N 中分选出必要的子集。

给定筛选条件:

$$g \not\equiv 0 \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (6)$$

$$g \not\equiv A_i \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (7)$$

g 表示集合 N 中被选元素。

从集合 N 中将同时符合 (6), (7) 式的所有元素分选出来, 组成子集 N_B , 再来讨论子集 N_B 的基数 $|N_B|$ (筛函数)。

16.1.1 求证筛函数的下界

集合 N 为自然数列, 模数集合 P 中的元素为互不相同的 r 个素数, 根据第一章 (61) 式可知基数 $|N_B|$ 的近似估算公式为

$$|N_B| = n \prod_{i=1}^r \left(\frac{\alpha_i}{p_i} \right) \quad (8)$$

根据第一章 (72) 式可知基数 $|N_B|$ 的下界计算公式为

$$|N_B| > n \prod_{i=1}^r \left(\frac{n - p_i}{n} \right) \left(\frac{\alpha_i}{p_i} \right) \quad (9)$$

式中 α_i 为按照筛选条件所选取的模 p_i 的同余类子集的个数, 下面具体分析确定 α_i 的数值。

(一) 当 $i=1$ 时, 筛选条件 (6) (7) 式即为

$$g \not\equiv 0 \pmod{p_1} \quad (10)$$

$$g \not\equiv A_1 \pmod{p_1} \quad (11)$$

$p_1 = 2$, A 为偶数, 故知 $A_1 = 0$, 可见 (11) 式与 (10) 式实为同一条件, 只需考虑其中之一即可。按照 (10) 式知, 集合 N 中模 p_1 的“0 同余类子集”不符合被选条件, 应当筛掉, 模 p_1 的“1 同余类子集”符合被选条件, 应被选取, 即得

$$\alpha_1 = 1 \quad (12)$$

(二) 当 $i > 1$ 时, 分两种情况:

(i) $i > 1$ 且 $A_i = 0$

将 $A_i = 0$ 这一条件代入 (7) 式后, (7) 式同于 (6) 式, 即二者合为 (6) 式一个筛选条件。由此知集合 N 中只有模 p_i 的“0 同余类子集”不符合被选条件, 其余 $(p_i - 1)$ 个模 p_i 的同余类子集都符合被选条件, 故得

$$\alpha_i = p_i - 1 \quad (i > 1; A_i = 0) \quad (13)$$

(ii) $i > 1$ 且 $A_i \neq 0$

此时, (6) 式和 (7) 式为两个不同的筛选条件, 由此决定了集合 N 中模 p_i 的“0 同余类子集”和“ A_i 同余类子集”都不符合被选条件, 其余 $(p_i - 2)$ 个模 p_i 的同余类子集都能符合被选条件, 故得

$$\alpha_i = p_i - 2 \quad (i > 1; A_i \neq 0) \quad (14)$$

将 (13) (14) 式合并, 得

$$\alpha_i = p_i - 2^{\tilde{\alpha}} \quad (i > 1) \quad (15)$$

$$\tilde{\alpha} = 0 \quad (A_i = 0); \quad \tilde{\alpha} = 1 \quad (A_i \neq 0)$$

将 (12), (15) 代入 (8) 式得近似估算公式

$$|N_B| = \left(\frac{n}{2}\right) \prod_{i=2}^r \left(\frac{p_i - 2^{\tilde{\alpha}}}{p_i}\right) \quad (16)$$

$$\tilde{\alpha} = 0 \quad (A_i = 0); \quad \tilde{\alpha} = 1 \quad (A_i \neq 0)$$

将 (12), (15) 代入 (9) 式得下界计算公式

$$|N_B| > F_1 \left(\frac{n}{2}\right) \prod_{i=2}^r \left(\frac{p_i - 2^{\tilde{\alpha}}}{p_i}\right) \quad (17)$$

$$\tilde{\alpha} = 0 \quad (A_i = 0); \quad \tilde{\alpha} = 1 \quad (A_i \neq 0)$$

$$\text{其中 } F_1 = \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{p_i}{n}\right) \quad (18)$$

由于 $p_i < n \quad (i = 1, 2, \dots, r)$ 显见 $F_1 > 0$, 故根据第一章 (64)

式可将 (17) 式改写为

$$|N_B| > F_1 \left(\frac{n}{2}\right) \prod_{i=2}^r \left(\frac{p_i - 2}{p_i}\right) \quad (19)$$

$$\text{由 (18) 式得 } F_1 > 1 - \left(\frac{1}{n}\right) \sum_{i=1}^r p_i \quad (20)$$

由第一章 (77) 式可推得

$$\Pi(x) - \Pi\left(\frac{x}{2}\right) < \Pi\left(\frac{x}{2}\right) \quad (21)$$

(21) 式表明, 数值越大的区域素数分布的密度越小。由此可见

$$\sum_{i=1}^r p_i < (1/2)(p_1 + p_r) \Pi(p_r) \quad (22)$$

由第一章 (81), (82) 式可知

$$\Pi(p_r) < H \left(\frac{p_r}{\ln p_r}\right) \quad (23)$$

(按 (81) 式 $H=2$; 按 (82) 式 $H=6\ln 2$)

即 H 可以选 2, 或 $6\ln 2$ 。

将 (23) 代入 (22) 式得

$$\sum_{i=1}^r p_i < (p_1 + p_r) \frac{H p_r}{2 \ln p_r} \quad (24)$$

(24) 代入 (20) 式得

$$F_1 > 1 - \frac{(p_1 + p_r) H p_r}{2 n \ln p_r} \quad (25)$$

(25) 代入 (19) 得

$$|N_B| > \left\{ \frac{n}{2} - \frac{(p_1 + p_r) H p_r}{4 \ln p_r} \right\} \prod_{i=2}^r \left(\frac{p_i - 2}{p_i}\right) \quad (26)$$

将 $(n/2)$ 作以下变换:

$$n/2 = (n/2)\{p_4/(p_5 - 2)\} + n/(p_5 - 2) \quad (27)$$

$$n/2 = (n/2)\{p_5/(p_6 - 2)\} \quad (28)$$

$$n/2 = (n/2)\{p_6/(p_7 - 2)\} + n/(p_7 - 2) \quad (29)$$

$$n/2 = (n/2)\{p_7/(p_8 - 2)\} \quad (30)$$

$$n/2 = (n/2)\{p_8/(p_9 - 2)\} + n/(p_9 - 2) \quad (31)$$

$$n/2 = (n/2)\{p_9/(p_{10} - 2)\} + 2n/(p_{10} - 2) \quad (32)$$

$$n/2 = (n/2)\{p_{10}/(p_{11} - 2)\} \quad (33)$$

$$n/2 = (n/2)\{p_{11}/(p_{12} - 2)\} + 2n/(p_{12} - 2) \quad (34)$$

$$n/2 = (n/2)\{p_{12}/(p_{13} - 2)\} + n/(p_{13} - 2) \quad (35)$$

$$n/2 = (n/2)\{p_{13}/(p_{14} - 2)\} \quad (36)$$

$$n/2 = (n/2)\{p_{14}/(p_{15} - 2)\} + n/(p_{15} - 2) \quad (37)$$

$$n/2 = (n/2)\{p_{15}/(p_{16} - 2)\} + 2n/(p_{16} - 2) \quad (38)$$

$$n/2 = (n/2)\{p_{16}/(p_{17} - 2)\} + 2n/(p_{17} - 2) \quad (39)$$

$$n/2 = (n/2)\{p_{17}/(p_{18} - 2)\} \quad (40)$$

$$n/2 = (n/2)\{p_{18}/(p_{19} - 2)\} + 2n/(p_{19} - 2) \quad (41)$$

$$n/2 = (n/2)\{p_{19}/(p_{20} - 2)\} + n/(p_{20} - 2) \quad (42)$$

$$n/2 = (n/2)\{p_{20}/(p_{21} - 2)\} \quad (43)$$

$$n/2 = (n/2)\{p_{21}/(p_{22} - 2)\} + 2n/(p_{22} - 2) \quad (44)$$

$$n/2 = (n/2)\{p_{22}/(p_{23} - 2)\} + n/(p_{23} - 2) \quad (45)$$

$$n/2 = (n/2)\{p_{23}/(p_{24} - 2)\} + 2n/(p_{24} - 2) \quad (46)$$

$$n/2 = (n/2)\{p_{24}/(p_{25} - 2)\} + 3n/(p_{25} - 2) \quad (47)$$

将 (27) ~ (47) 式逐次代入, 可得

$$n/2 = \frac{n}{2} \prod_{i=5}^{25} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i - 2} \right) + F_2 \quad (48)$$

$$\begin{aligned}
F_2 = & \left(\frac{n}{p_5-2}\right) \prod_{i=6}^{25} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right) + \left(\frac{n}{p_7-2}\right) \prod_{i=8}^{25} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right) + \\
& \left(\frac{n}{p_9-2}\right) \prod_{i=10}^{25} \left\{\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right\} + \left(\frac{2n}{p_{10}-2}\right) \prod_{i=11}^{25} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right) + \\
& \left(\frac{2n}{p_{12}-2}\right) \prod_{i=13}^{25} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right) + \left(\frac{n}{p_{13}-2}\right) \prod_{i=14}^{25} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right) + \\
& \left(\frac{n}{p_{15}-2}\right) \prod_{i=16}^{25} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right) + \left(\frac{2n}{p_{16}-2}\right) \prod_{i=17}^{25} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right) + \\
& \left(\frac{2n}{p_{17}-2}\right) \prod_{i=18}^{25} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right) + \left(\frac{2n}{p_{19}-2}\right) \prod_{i=20}^{25} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right) + \\
& \left(\frac{n}{p_{20}-2}\right) \prod_{i=21}^{25} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right) + \left(\frac{2n}{p_{22}-2}\right) \prod_{i=23}^{25} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right) + \\
& \left(\frac{n}{p_{23}-2}\right) \prod_{i=24}^{25} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right) + \\
& \left(\frac{2n}{p_{24}-2}\right) \left(\frac{p_{24}}{p_{25}-2}\right) + \left(\frac{3n}{p_{25}-2}\right) \tag{49}
\end{aligned}$$

将 $p_5 = 11$, $p_6 = 13$, $p_7 = 17$, $p_8 = 19$, $p_9 = 23$, $p_{10} = 29$,
 $p_{11} = 31$, $p_{12} = 37$, $p_{13} = 41$, $p_{14} = 43$, $p_{15} = 47$, $p_{16} = 53$,
 $p_{17} = 59$, $p_{18} = 61$, $p_{19} = 67$, $p_{20} = 71$, $p_{21} = 73$, $p_{22} = 79$,
 $p_{23} = 83$, $p_{24} = 89$, $p_{25} = 97$ 代入 (49) 式求得

$$F_2 = 0.3654n \tag{50}$$

将 (50) 式代入 (48) 得

$$n/2 = \frac{n}{2} \prod_{i=5}^{25} \left\{\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right\} + 0.3654n \tag{51}$$

将 (51) 代入 (26) 式得

$$|N_B| > \frac{n}{2} \prod_{i=5}^{25} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i - 2} \right) \prod_{j=2}^r \left(\frac{p_j - 2}{p_j} \right) + \left\{ 0.3654n - \frac{(p_1 + p_r)Hp_r}{4 \ln p_r} \right\} \prod_{i=2}^r \left(\frac{p_i - 2}{p_i} \right) \quad (52)$$

$$\text{由 (2) 和 (4) 式知: } n = A/2 \geq \frac{1}{2} p_r^2 \quad (53)$$

将 (53) 代入 (52) 式,

$$|N_B| > \frac{n}{2} \prod_{i=5}^{25} \left\{ \frac{p_{i-1}}{p_i - 2} \right\} \prod_{j=2}^r \left\{ \frac{p_j - 2}{p_j} \right\} + F_3 \quad (54)$$

$$F_3 = \left\{ 0.1827 p_r - \frac{(p_1 + p_r)H}{4 \ln p_r} \right\} p_r \prod_{i=2}^r \left\{ \frac{p_i - 2}{p_i} \right\} \quad (55)$$

$$\text{令 } F_4 = 0.1827 p_r - \frac{(p_1 + p_r)H}{4 \ln p_r} \quad (56)$$

$$F_3 = F_4 p_r \prod_{i=2}^r \left\{ \frac{p_i - 2}{p_i} \right\} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} \frac{dF_4}{dp_r} &= 0.1827 - \left(\frac{H}{4} \right) \left\{ \frac{\ln p_r - (p_1 + p_r)(1/p_r)}{\ln^2 p_r} \right\} = \\ &0.1827 - \frac{H}{4 \ln p_r} + \frac{H(p_1 + p_r)}{4 p_r \ln^2 p_r} > \\ &0.1827 - \frac{H}{4 \ln p_r} \end{aligned} \quad (58)$$

$$\text{令 } 0.1827 - \frac{H}{4 \ln p_r} > 0$$

$$\text{得: } p_r > e^{\{H/0.7308\}} \quad (59)$$

将条件 (59) 式代入 (58) 式得

$$\frac{dF_4}{dp_r} > 0 \quad (p_r > e^{(H/0.7308)}) \quad (60)$$

(60) 式表明当 $p_r > e^{(H/0.7308)}$ 时, F_4 为 p_r 的增值函数。

前已述及, H 取值可根据所论偶数的数值区间选择。为更具一般性, 此处我们选择 $H=6\ln 2$ 。这样, (60) 式可以改写为

$$\frac{dF_4}{dp_r} > 0 \quad (p_r > 297) \quad (61)$$

当 $A \geq 120000$ 时, $p_r \geq 337 > 297$

将 $p_r=337$, $H=6\ln 2$, 代入 (56) 式算得

$$F_4 = 1.0088 > 1, \quad (p_r = 337) \quad (62)$$

由 (61) (62) 式可知

$$F_4 > 1 \quad (p_r \geq 337) \quad (63)$$

$$\text{或者, } F_4 > 1 \quad (A \geq 120000) \quad (64)$$

将 (64) 式代入 (57) 式, 得

$$F_3 > p_r \prod_{i=2}^r \left\{ \frac{p_i - 2}{p_i} \right\} \quad (65)$$

$$\text{由于 } p_i - 2 \geq p_{i-1} \quad (i \geq 3) \quad (66)$$

$$\text{故 } F_3 > \left(\frac{p_r}{3}\right) \prod_{i=3}^r \left\{ \frac{p_{i-1}}{p_i} \right\} = 1 \quad (67)$$

将 (67) 代入 (54) 式得

$$|N_B| > \frac{n}{2} \prod_{i=5}^{25} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i - 2} \right) \prod_{j=2}^r \left(\frac{p_j - 2}{p_j} \right) + 1 \quad (68)$$

由 (66), (68) 式可得

$$|N_B| > \left(\frac{n}{2}\right) \left(\frac{1}{3}\right) \prod_{i=3}^r \left(\frac{p_{i-1}}{p_i} \right) + 1 =$$

$$\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{1}{P_r}\right)+1 \quad (69)$$

将 (53) 式代入 (69) 式得

$$|N_B| > (p_r/4) + 1 \quad (70)$$

考虑到集合 N_B 中有可能包含元素 1。所以, 集合 N_B 中数值不为 1 的元素个数至少应为 $(|N_B|-1)$ 个

$$|N_B|-1 > p_r/4 \quad (71)$$

16.1.2 通过子集 N_B 求解

从集合 N_B 中任取一个数值不为 1 的元素 x , 则

$$x \in E, \quad x > 1 \quad (72)$$

再引入参数 y

$$y = A - x \quad (73)$$

$$\text{显然, } y \in E, \quad y > 1 \quad (74)$$

以集合 P 中各元素为模数求得同余式组:

$$x \equiv x_i \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (75)$$

$$y \equiv y_i \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (76)$$

$x \in N_B$, 根据筛选条件 (6) 式可知

$$x_i \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (77)$$

根据筛选条件 (7) 式可知

$$x_i \neq A_i, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (78)$$

依据同余式的性质, 由 (73) 式推得

$$y_i \equiv A_i - x_i \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (79)$$

由 (78) 和 (79) 式可知

$$y_i \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (80)$$

根据第一章引理 3, 由 (72) 和 (77) 式可知: x 为奇素数。

根据第一章引理 3, 由 (74) 和 (80) 式可知: y 为奇素数。

将 (73) 式移项可得

$$A = x + y \quad (81)$$

(81) 式即为关于偶数的哥德巴赫猜想的数学表达式。

x 为集合 N_B 中任取的一个不为 1 的元素即构成一对奇素数解。由 (71) 式知集合 N_B 中不为 1 的元素个数不少于 $p_r/4$ 个, 故通过集合 N_B 至少可以求得 $p_r/4$ 对奇素数满足“哥德巴赫猜想”的命题要求。

对于偶数 120000 而言, $(p_r/4) = 84.25$, 故知偶数 120000 对应 (81) 式的解的个数必不少于 85 个 (85 对奇素数)。其它大于 120000 的任意偶数所对应的 $p_r/4$ 都不小于 84.25, 所以对应 (81) 式的解的个数同样不少于 85 个 (85 对奇素数)。

16.2 解的完备性问题

前述通过集合 N_B 求得 (81) 式的解, 并非 (81) 式的全解, 其全解还应补充以下部分。

16.2.1 补充解求证

延用前面的定义:

$$E = (1, 2, \dots, A)$$

$$P = (p_1, p_2, \dots, p_r)$$

$$2 = p_1 < p_2 < \dots < p_r \leq A^{1/2}$$

$$A \equiv A_i \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

用筛选方法从集合 P 中分选出必要的子集。

给定筛选条件,

$$g \not\equiv A_i \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (82)$$

g 表示集合 P 中被选元素。

从集合 P 中, 将符合 (82) 式条件的所有元素分选出来, 组成子集 P_B 。

A 为偶数, 必然 $A_1 = 0$ 。

由筛选条件 (82) 式可知, p_1 肯定不属于集合 P_B , 只要集合 P_B 不是空集, 则其中的元素只能是奇素数。

假若 $P_B \neq \emptyset$

我们从集合 P_B 中任取一个奇素数 e , 且令

$$z = A - e \quad (83)$$

$$\text{则 } z \in E, \quad z > 1 \quad (84)$$

以集合 P 中各元素为模数, 求得同余式组:

$$e \equiv e_i \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$z \equiv z_i \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

由于 $e \in P_B$, 根据筛选条件 (82) 式可知

$$e_i \neq A_i, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (85)$$

依据同余式的性质, 由 (83) 式推得

$$z_i \equiv A_i - e_i \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (86)$$

由 (85) 和 (86) 式可知

$$z_i \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (87)$$

根据第一章引理 3, 由 (84) 和 (87) 式可知: z 为奇素数。

将 (83) 式移项可得。

$$A = z + e \quad (88)$$

由 (88) 可知, (z, e) 为满足 (81) 式的一个解。同理, 集合 P_B 中的每个元素都对应 (81) 式的一个解。

16.2.2 全解构成

满足 (81) 式的全解应由以下两部分组成:

- (1) 通过集合 N_B 求得的解;
- (2) 通过集合 P_B 求得的解。

16.3 求解程序

下面是用 ASP 写的求解程序, 包括输入界面和运算显示两个文件:

第一个文件 (input.asp):

```
<html>
<head>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=
gb2312">
<LINK href="/style.css" type=text/css rel=stylesheet>
<title>哥德巴赫猜想</title>
<script language="JavaScript" >
function suborno () {
    var a=form1.a.value;
    if (a=="||a==null) {
        alert ("请输入偶数 (100 以上)! ");
        return;
    }else if (parseInt (a) %2!=0||parseInt (a) <100) {
        alert ("输入的数必须是 100 以上的偶数! ");
        return;
    }form1.submit ();
}
</script>

</head>

<body bgcolor="#BFC0B6">
```



```

<html>
<head>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=
gb2312">
<LINK href="/style.css" type=text/css rel=stylesheet>
<title>孪生素数</title>
</head>
<body bgcolor="#BFC0B6"><br>&nbsp;<br>&nbsp;<br>&nbsp;<br>
<div align="center" id="wait_div"><font color="#FF0000" size=
"4"><strong>如果出现提示“.....是否取消该脚本？”，请点击
“否”，并请耐心等待！</strong></font></div>
<div align="center" id="wait2_div" style="display:none">
<font color="#FF0000" size="5"><strong>哥德巴赫猜想求解运算
结果（筛法2）</strong></font></div>
<p><script language="JavaScript">
var a,i,pi,j,flag,ni,n,m,x,y,k,pr,ther,num1,num2,num3;
//var array_ni = new Array ( ) ;
var array_pi = new Array ( ) ;
//var array_pi2 = new Array ( ) ;
var array_n = new Array ( ) ;
var array_ai = new Array ( ) ;
var array_hi = new Array ( ) ;
//var array_pi_ni = new Array ( )
//a=clng (request.form ("a"))
num1=0;
num2=0;
num3=0;
a=parseInt ("<%=a%>") ;
if (a<10 || a%2!=0)

```

[illegible]


```

    {
        //ni=n%pi;
        //array_ni[i]=ni;
        array_pi[i]=pi;
        //array_pi2[i]=pi;
        array_ai[i]=a%pi;
        //array_pi_ni[i]=pi-ni
        //alert (array_pi[i]) ;
        i++;
    }
}

ther=i;

for (i=0;i<n-9;i++) {
    array_n[i]=i+10;
    //alert (array_n[i]) ;
}

for (i=0;i<array_n.length;i++)
{
    for (k=0;k<array_pi.length;k++)
    {
        if ( ( array_n[i]%array_pi[k]==0 ) ||
(array_n[i]%array_pi[k]==array_ai[k]))
        {
            array_n[i]=0;
            break;
        }
    }
}

```

```
    }  
  }  
  x=0;  
  for (i=0;i<array_n.length;i++) {  
    if (array_n[i]>0)  
      x++;  
    //alert (array_n[i]) ;  
  }  
  var xx=0;  
  var theflag;  
  for (i=1;i<array_pi.length;i++) {  
    theflag=1;  
    for (k=0;k<array_pi.length;k++)  
    {  
      if ((array_pi[i]%array_pi[k]==array_ai[k]))  
      {  
        theflag=0;  
        break;  
      }  
    }  
    }if (theflag==1) {  
      array_hi[xx]=array_pi[i];  
      xx++;  
    }  
  }  
  if (xx>0) {
```

document.write("
从集合 P 中求得的解的个数为: " + xx + "
");

document.write("从集合 P 中求得的解:
");

[illegible]

```

        {
            document.write("<br>");
        }
        m=m+1;
    }

}

}

document.all("wait_div").style.display="none";
document.all("wait2_div").style.display="";
}
</script>
</p></body>
</html>

```

16.4 实筛数据

输入的偶数 a 为: 210 $n = a/2 = 105$

从集合 P 中求得的解的个数为: 2

从集合 P 中求得的解:

$x=011 \ y=199 \ x=013 \ y=197$

从集合 N 中求得的解的个数为: 17

从集合 N 中求得的解:

$x=017 \ y=193 \ x=019 \ y=191 \ x=029 \ y=181$

$x=031 \ y=179 \ x=037 \ y=173 \ x=043 \ y=167$

$x=047 \ y=163 \ x=053 \ y=157 \ x=059 \ y=151$

$x=061 \ y=149 \ x=071 \ y=139 \ x=073 \ y=137$

$x=079 \ y=131 \ x=083 \ y=127 \ x=097 \ y=113$

$$x=101 \ y=109 \quad x=103 \ y=107$$

输入的偶数 a 为: 214 $n = a/2 = 107$

从集合 P 中求得的解的个数为: 1

从集合 P 中求得的解:

$$x=003 \ y=211$$

从集合 N 中求得的解的个数为: 7

从集合 N 中求得的解:

$$x=017 \ y=197 \quad x=023 \ y=191 \quad x=041 \ y=173$$

$$x=047 \ y=167 \quad x=083 \ y=131 \quad x=101 \ y=113$$

$$x=107 \ y=107$$

输入的偶数 a 为: 10000 $n = a/2 = 5000$

从集合 P 中求得的解的个数为: 2

从集合 P 中求得的解:

$$x=00059 \ y=99941 \quad x=00071 \ y=99929$$

从集合 N 中求得的解的个数为: 125

从集合 N 中求得的解:

$$x=00113 \ y=99887 \quad x=00149 \ y=99851 \quad x=00167 \ y=99833$$

$$x=00197 \ y=99803 \quad x=00233 \ y=99767 \quad x=00251 \ y=99749$$

$$x=00257 \ y=99743 \quad x=00281 \ y=99719 \quad x=00311 \ y=99689$$

$$x=00449 \ y=99551 \quad x=00461 \ y=99539 \quad x=00467 \ y=99533$$

$$x=00479 \ y=99521 \quad x=00503 \ y=99497 \quad x=00509 \ y=99491$$

$$x=00521 \ y=99479 \quad x=00563 \ y=99437 \quad x=00569 \ y=99431$$

$$x=00587 \ y=99413 \quad x=00659 \ y=99341 \quad x=00677 \ y=99323$$

$$x=00719 \ y=99281 \quad x=00743 \ y=99257 \quad x=00761 \ y=99239$$

$$x=00773 \ y=99227 \quad x=00797 \ y=99203 \quad x=00827 \ y=99173$$

$$x=00839 \ y=99161 \quad x=00863 \ y=99137 \quad x=00941 \ y=99059$$

$$x=00971 \ y=99029 \quad x=01031 \ y=98969 \quad x=01049 \ y=98951$$

$x=01151\ y=08849$	$x=01163\ y=08837$	$x=01181\ y=08819$
$x=01193\ y=08807$	$x=01217\ y=08783$	$x=01259\ y=08741$
$x=01301\ y=08699$	$x=01307\ y=08693$	$x=01319\ y=08681$
$x=01373\ y=08627$	$x=01427\ y=08573$	$x=01487\ y=08513$
$x=01499\ y=08501$	$x=01553\ y=08447$	$x=01571\ y=08429$
$x=01613\ y=08387$	$x=01637\ y=08363$	$x=01709\ y=08291$
$x=01877\ y=08123$	$x=01889\ y=08111$	$x=01907\ y=08093$
$x=01913\ y=08087$	$x=01931\ y=08069$	$x=02063\ y=07937$
$x=02081\ y=07919$	$x=02099\ y=07901$	$x=02207\ y=07793$
$x=02243\ y=07757$	$x=02273\ y=07727$	$x=02297\ y=07703$
$x=02309\ y=07691$	$x=02351\ y=07649$	$x=02357\ y=07643$
$x=02393\ y=07607$	$x=02411\ y=07589$	$x=02417\ y=07583$
$x=02423\ y=07577$	$x=02441\ y=07559$	$x=02459\ y=07541$
$x=02477\ y=07523$	$x=02543\ y=07457$	$x=02549\ y=07451$
$x=02693\ y=07307$	$x=02753\ y=07247$	$x=02789\ y=07211$
$x=02879\ y=07121$	$x=02897\ y=07103$	$x=02957\ y=07043$
$x=02999\ y=07001$	$x=03023\ y=06977$	$x=03041\ y=06959$
$x=03083\ y=06917$	$x=03089\ y=06911$	$x=03137\ y=06863$
$x=03167\ y=06833$	$x=03209\ y=06791$	$x=03221\ y=06779$
$x=03299\ y=06701$	$x=03347\ y=06653$	$x=03449\ y=06551$
$x=03527\ y=06473$	$x=03671\ y=06329$	$x=03677\ y=06323$
$x=03701\ y=06299$	$x=03779\ y=06221$	$x=03797\ y=06203$
$x=03803\ y=06197$	$x=03911\ y=06089$	$x=03947\ y=06053$
$x=03989\ y=06011$	$x=04013\ y=05987$	$x=04019\ y=05981$
$x=04073\ y=05927$	$x=04133\ y=05867$	$x=04139\ y=05861$
$x=04157\ y=05843$	$x=04217\ y=05783$	$x=04259\ y=05741$
$x=04283\ y=05717$	$x=04289\ y=05711$	$x=04349\ y=05651$
$x=04409\ y=05591$	$x=04481\ y=05519$	$x=04493\ y=05507$
$x=04517\ y=05483$	$x=04523\ y=05477$	$x=04583\ y=05417$
$x=04649\ y=05351$	$x=04691\ y=05309$	$x=04703\ y=05297$
$x=04721\ y=05279$	$x=04919\ y=05081$	

输入的偶数 a 为: 30000 $n = a/2 = 15000$

从集合 P 中求得的解的个数为: 12

从集合 P 中求得的解:

$x=00011 \ y=29989$	$x=00017 \ y=29983$	$x=00041 \ y=29959$
$x=00053 \ y=29947$	$x=00073 \ y=29927$	$x=00079 \ y=29921$
$x=00083 \ y=29917$	$x=00127 \ y=29873$	$x=00137 \ y=29863$
$x=00149 \ y=29851$	$x=00163 \ y=29837$	$x=00167 \ y=29833$

从集合 N 中求得的解的个数为: 590

从集合 N 中求得的解:

$x=00181 \ y=29819$	$x=00197 \ y=29803$	$x=00211 \ y=29789$
$x=00239 \ y=29761$	$x=00241 \ y=29759$	$x=00277 \ y=29723$
$x=00283 \ y=29717$	$x=00317 \ y=29683$	$x=00331 \ y=29669$
$x=00337 \ y=29663$	$x=00359 \ y=29641$	$x=00367 \ y=29633$
$x=00389 \ y=29611$	$x=00401 \ y=29599$	$x=00419 \ y=29581$
$x=00431 \ y=29569$	$x=00433 \ y=29567$	$x=00463 \ y=29537$
$x=00499 \ y=29501$	$x=00547 \ y=29453$	$x=00557 \ y=29443$
$x=00563 \ y=29437$	$x=00571 \ y=29429$	$x=00577 \ y=29423$
$x=00599 \ y=29401$	$x=00601 \ y=29399$	$x=00613 \ y=29387$
$x=00617 \ y=29383$	$x=00653 \ y=29347$	$x=00661 \ y=29339$
$x=00673 \ y=29327$	$x=00757 \ y=29243$	$x=00769 \ y=29231$
$x=00809 \ y=29191$	$x=00821 \ y=29179$	$x=00827 \ y=29173$
$x=00853 \ y=29147$	$x=00863 \ y=29137$	$x=00877 \ y=29123$
$x=00937 \ y=29063$	$x=00941 \ y=29059$	$x=00967 \ y=29033$
$x=00977 \ y=29023$	$x=00983 \ y=29017$	$x=00991 \ y=29009$
$x=01021 \ y=28979$	$x=01039 \ y=28961$	$x=01051 \ y=28949$
$x=01091 \ y=28909$	$x=01129 \ y=28871$	$x=01163 \ y=28837$
$x=01187 \ y=28813$	$x=01193 \ y=28807$	$x=01229 \ y=28771$
$x=01249 \ y=28751$	$x=01277 \ y=28723$	$x=01289 \ y=28711$
$x=01297 \ y=28703$	$x=01303 \ y=28697$	$x=01373 \ y=28627$

$x=01381$	$y=28619$	$x=01409$	$y=28591$	$x=01427$	$y=28573$
$x=01429$	$y=28571$	$x=01451$	$y=28549$	$x=01453$	$y=28547$
$x=01459$	$y=28541$	$x=01483$	$y=28517$	$x=01487$	$y=28513$
$x=01523$	$y=28477$	$x=01553$	$y=28447$	$x=01567$	$y=28433$
$x=01571$	$y=28429$	$x=01597$	$y=28403$	$x=01607$	$y=28393$
$x=01613$	$y=28387$	$x=01693$	$y=28307$	$x=01721$	$y=28279$
$x=01723$	$y=28277$	$x=01789$	$y=28211$	$x=01877$	$y=28123$
$x=01889$	$y=28111$	$x=01901$	$y=28099$	$x=01913$	$y=28087$
$x=01931$	$y=28069$	$x=01949$	$y=28051$	$x=01973$	$y=28027$
$x=01999$	$y=28001$	$x=02003$	$y=27997$	$x=02017$	$y=27983$
$x=02039$	$y=27961$	$x=02053$	$y=27947$	$x=02081$	$y=27919$
$x=02083$	$y=27917$	$x=02099$	$y=27901$	$x=02153$	$y=27847$
$x=02207$	$y=27793$	$x=02221$	$y=27779$	$x=02237$	$y=27763$
$x=02251$	$y=27749$	$x=02267$	$y=27733$	$x=02309$	$y=27691$
$x=02311$	$y=27689$	$x=02347$	$y=27653$	$x=02383$	$y=27617$
$x=02389$	$y=27611$	$x=02417$	$y=27583$	$x=02459$	$y=27541$
$x=02473$	$y=27527$	$x=02521$	$y=27479$	$x=02543$	$y=27457$
$x=02551$	$y=27449$	$x=02591$	$y=27409$	$x=02593$	$y=27407$
$x=02633$	$y=27367$	$x=02663$	$y=27337$	$x=02671$	$y=27329$
$x=02719$	$y=27281$	$x=02729$	$y=27271$	$x=02741$	$y=27259$
$x=02789$	$y=27211$	$x=02803$	$y=27197$	$x=02857$	$y=27143$
$x=02897$	$y=27103$	$x=02909$	$y=27091$	$x=02927$	$y=27073$
$x=02939$	$y=27061$	$x=02957$	$y=27043$	$x=02969$	$y=27031$
$x=03019$	$y=26981$	$x=03041$	$y=26959$	$x=03049$	$y=26951$
$x=03079$	$y=26921$	$x=03109$	$y=26891$	$x=03119$	$y=26881$
$x=03121$	$y=26879$	$x=03137$	$y=26863$	$x=03167$	$y=26833$
$x=03187$	$y=26813$	$x=03217$	$y=26783$	$x=03271$	$y=26729$
$x=03299$	$y=26701$	$x=03301$	$y=26699$	$x=03307$	$y=26693$
$x=03313$	$y=26687$	$x=03319$	$y=26681$	$x=03331$	$y=26669$
$x=03359$	$y=26641$	$x=03373$	$y=26627$	$x=03461$	$y=26539$
$x=03499$	$y=26501$	$x=03511$	$y=26489$	$x=03541$	$y=26459$

$x=03583$	$y=26417$	$x=03593$	$y=26407$	$x=03607$	$y=26393$
$x=03613$	$y=26387$	$x=03643$	$y=26357$	$x=03691$	$y=26309$
$x=03733$	$y=26267$	$x=03739$	$y=26261$	$x=03797$	$y=26203$
$x=03823$	$y=26177$	$x=03847$	$y=26153$	$x=03881$	$y=26119$
$x=03889$	$y=26111$	$x=03917$	$y=26083$	$x=03947$	$y=26053$
$x=04001$	$y=25999$	$x=04003$	$y=25997$	$x=04019$	$y=25981$
$x=04049$	$y=25951$	$x=04057$	$y=25943$	$x=04111$	$y=25889$
$x=04127$	$y=25873$	$x=04133$	$y=25867$	$x=04153$	$y=25847$
$x=04159$	$y=25841$	$x=04201$	$y=25799$	$x=04229$	$y=25771$
$x=04241$	$y=25759$	$x=04253$	$y=25747$	$x=04259$	$y=25741$
$x=04283$	$y=25717$	$x=04297$	$y=25703$	$x=04327$	$y=25673$
$x=04357$	$y=25643$	$x=04391$	$y=25609$	$x=04397$	$y=25603$
$x=04421$	$y=25579$	$x=04423$	$y=25577$	$x=04463$	$y=25537$
$x=04547$	$y=25453$	$x=04561$	$y=25439$	$x=04591$	$y=25409$
$x=04643$	$y=25357$	$x=04651$	$y=25349$	$x=04657$	$y=25343$
$x=04679$	$y=25321$	$x=04691$	$y=25309$	$x=04817$	$y=25183$
$x=04831$	$y=25169$	$x=04889$	$y=25111$	$x=04903$	$y=25097$
$x=04943$	$y=25057$	$x=04967$	$y=25033$	$x=04969$	$y=25031$
$x=04987$	$y=25013$	$x=05011$	$y=24989$	$x=05021$	$y=24979$
$x=05023$	$y=24977$	$x=05077$	$y=24923$	$x=05081$	$y=24919$
$x=05153$	$y=24847$	$x=05179$	$y=24821$	$x=05233$	$y=24767$
$x=05237$	$y=24763$	$x=05303$	$y=24697$	$x=05309$	$y=24691$
$x=05323$	$y=24677$	$x=05407$	$y=24593$	$x=05449$	$y=24551$
$x=05483$	$y=24517$	$x=05501$	$y=24499$	$x=05519$	$y=24481$
$x=05527$	$y=24473$	$x=05531$	$y=24469$	$x=05557$	$y=24443$
$x=05581$	$y=24419$	$x=05641$	$y=24359$	$x=05683$	$y=24317$
$x=05749$	$y=24251$	$x=05821$	$y=24179$	$x=05849$	$y=24151$
$x=05867$	$y=24133$	$x=05879$	$y=24121$	$x=05897$	$y=24103$
$x=05903$	$y=24097$	$x=05923$	$y=24077$	$x=05939$	$y=24061$
$x=05981$	$y=24019$	$x=06007$	$y=23993$	$x=06029$	$y=23971$
$x=06043$	$y=23957$	$x=06089$	$y=23911$	$x=06091$	$y=23909$

$x=06101$	$y=23899$	$x=06113$	$y=23887$	$x=06121$	$y=23879$
$x=06131$	$y=23869$	$x=06143$	$y=23857$	$x=06173$	$y=23827$
$x=06199$	$y=23801$	$x=06211$	$y=23789$	$x=06247$	$y=23753$
$x=06257$	$y=23743$	$x=06311$	$y=23689$	$x=06323$	$y=23677$
$x=06329$	$y=23671$	$x=06337$	$y=23663$	$x=06367$	$y=23633$
$x=06373$	$y=23627$	$x=06397$	$y=23603$	$x=06451$	$y=23549$
$x=06469$	$y=23531$	$x=06491$	$y=23509$	$x=06553$	$y=23447$
$x=06569$	$y=23431$	$x=06661$	$y=23339$	$x=06673$	$y=23327$
$x=06679$	$y=23321$	$x=06689$	$y=23311$	$x=06703$	$y=23297$
$x=06709$	$y=23291$	$x=06791$	$y=23209$	$x=06803$	$y=23197$
$x=06827$	$y=23173$	$x=06833$	$y=23167$	$x=06841$	$y=23159$
$x=06857$	$y=23143$	$x=06869$	$y=23131$	$x=06883$	$y=23117$
$x=06947$	$y=23053$	$x=06959$	$y=23041$	$x=06961$	$y=23039$
$x=06971$	$y=23029$	$x=06983$	$y=23017$	$x=06997$	$y=23003$
$x=07027$	$y=22973$	$x=07039$	$y=22961$	$x=07057$	$y=22943$
$x=07079$	$y=22921$	$x=07129$	$y=22871$	$x=07193$	$y=22807$
$x=07213$	$y=22787$	$x=07283$	$y=22717$	$x=07309$	$y=22691$
$x=07321$	$y=22679$	$x=07331$	$y=22669$	$x=07349$	$y=22651$
$x=07433$	$y=22567$	$x=07451$	$y=22549$	$x=07457$	$y=22543$
$x=07459$	$y=22541$	$x=07489$	$y=22511$	$x=07499$	$y=22501$
$x=07517$	$y=22483$	$x=07547$	$y=22453$	$x=07559$	$y=22441$
$x=07591$	$y=22409$	$x=07603$	$y=22397$	$x=07717$	$y=22283$
$x=07723$	$y=22277$	$x=07727$	$y=22273$	$x=07741$	$y=22259$
$x=07753$	$y=22247$	$x=07829$	$y=22171$	$x=07841$	$y=22159$
$x=07853$	$y=22147$	$x=07867$	$y=22133$	$x=07877$	$y=22123$
$x=07907$	$y=22093$	$x=07927$	$y=22073$	$x=07933$	$y=22067$
$x=07937$	$y=22063$	$x=07949$	$y=22051$	$x=07963$	$y=22037$
$x=08009$	$y=21991$	$x=08039$	$y=21961$	$x=08089$	$y=21911$
$x=08161$	$y=21839$	$x=08179$	$y=21821$	$x=08233$	$y=21767$
$x=08243$	$y=21757$	$x=08263$	$y=21737$	$x=08273$	$y=21727$
$x=08287$	$y=21713$	$x=08317$	$y=21683$	$x=08353$	$y=21647$

$x=08387\ y=21613$	$x=08389\ y=21611$	$x=08423\ y=21577$
$x=08431\ y=21569$	$x=08443\ y=21557$	$x=08501\ y=21499$
$x=08513\ y=21487$	$x=08581\ y=21419$	$x=08599\ y=21401$
$x=08609\ y=21391$	$x=08623\ y=21377$	$x=08677\ y=21323$
$x=08681\ y=21319$	$x=08731\ y=21269$	$x=08753\ y=21247$
$x=08779\ y=21221$	$x=08807\ y=21193$	$x=08821\ y=21179$
$x=08831\ y=21169$	$x=08837\ y=21163$	$x=08861\ y=21139$
$x=08893\ y=21107$	$x=08933\ y=21067$	$x=08941\ y=21059$
$x=08969\ y=21031$	$x=08999\ y=21001$	$x=09041\ y=20959$
$x=09103\ y=20897$	$x=09127\ y=20873$	$x=09151\ y=20849$
$x=09227\ y=20773$	$x=09241\ y=20759$	$x=09257\ y=20743$
$x=09281\ y=20719$	$x=09283\ y=20717$	$x=09293\ y=20707$
$x=09319\ y=20681$	$x=09337\ y=20663$	$x=09437\ y=20563$
$x=09467\ y=20533$	$x=09479\ y=20521$	$x=09491\ y=20509$
$x=09521\ y=20479$	$x=09601\ y=20399$	$x=09631\ y=20369$
$x=09643\ y=20357$	$x=09677\ y=20323$	$x=09739\ y=20261$
$x=09767\ y=20233$	$x=09769\ y=20231$	$x=09781\ y=20219$
$x=09817\ y=20183$	$x=09839\ y=20161$	$x=09851\ y=20149$
$x=09857\ y=20143$	$x=09871\ y=20129$	$x=09883\ y=20117$
$x=09887\ y=20113$	$x=09929\ y=20071$	$x=09949\ y=20051$
$x=10007\ y=19993$	$x=10009\ y=19991$	$x=10037\ y=19963$
$x=10039\ y=19961$	$x=10111\ y=19889$	$x=10133\ y=19867$
$x=10139\ y=19861$	$x=10159\ y=19841$	$x=10181\ y=19819$
$x=10223\ y=19777$	$x=10247\ y=19753$	$x=10273\ y=19727$
$x=10301\ y=19699$	$x=10303\ y=19697$	$x=10313\ y=19687$
$x=10391\ y=19609$	$x=10429\ y=19571$	$x=10457\ y=19543$
$x=10459\ y=19541$	$x=10499\ y=19501$	$x=10529\ y=19471$
$x=10531\ y=19469$	$x=10559\ y=19441$	$x=10567\ y=19433$
$x=10597\ y=19403$	$x=10613\ y=19387$	$x=10627\ y=19373$
$x=10667\ y=19333$	$x=10691\ y=19309$	$x=10711\ y=19289$
$x=10733\ y=19267$	$x=10781\ y=19219$	$x=10789\ y=19211$

$x=10837$	$y=19163$	$x=10859$	$y=19141$	$x=10861$	$y=19139$
$x=10949$	$y=19051$	$x=10987$	$y=19013$	$x=11027$	$y=18973$
$x=11083$	$y=18917$	$x=11087$	$y=18913$	$x=11131$	$y=18869$
$x=11161$	$y=18839$	$x=11197$	$y=18803$	$x=11213$	$y=18787$
$x=11243$	$y=18757$	$x=11251$	$y=18749$	$x=11257$	$y=18743$
$x=11287$	$y=18713$	$x=11299$	$y=18701$	$x=11321$	$y=18679$
$x=11329$	$y=18671$	$x=11383$	$y=18617$	$x=11447$	$y=18553$
$x=11483$	$y=18517$	$x=11497$	$y=18503$	$x=11519$	$y=18481$
$x=11549$	$y=18451$	$x=11587$	$y=18413$	$x=11621$	$y=18379$
$x=11633$	$y=18367$	$x=11689$	$y=18311$	$x=11699$	$y=18301$
$x=11731$	$y=18269$	$x=11743$	$y=18257$	$x=11777$	$y=18223$
$x=11783$	$y=18217$	$x=11789$	$y=18211$	$x=11801$	$y=18199$
$x=11831$	$y=18169$	$x=11867$	$y=18133$	$x=11903$	$y=18097$
$x=11923$	$y=18077$	$x=11939$	$y=18061$	$x=11941$	$y=18059$
$x=11953$	$y=18047$	$x=11959$	$y=18041$	$x=11987$	$y=18013$
$x=12011$	$y=17989$	$x=12041$	$y=17959$	$x=12043$	$y=17957$
$x=12071$	$y=17929$	$x=12097$	$y=17903$	$x=12109$	$y=17891$
$x=12119$	$y=17881$	$x=12149$	$y=17851$	$x=12161$	$y=17839$
$x=12163$	$y=17837$	$x=12211$	$y=17789$	$x=12239$	$y=17761$
$x=12251$	$y=17749$	$x=12253$	$y=17747$	$x=12263$	$y=17737$
$x=12343$	$y=17657$	$x=12373$	$y=17627$	$x=12377$	$y=17623$
$x=12391$	$y=17609$	$x=12401$	$y=17599$	$x=12421$	$y=17579$
$x=12491$	$y=17509$	$x=12503$	$y=17497$	$x=12511$	$y=17489$
$x=12517$	$y=17483$	$x=12569$	$y=17431$	$x=12583$	$y=17417$
$x=12611$	$y=17389$	$x=12613$	$y=17387$	$x=12641$	$y=17359$
$x=12659$	$y=17341$	$x=12743$	$y=17257$	$x=12791$	$y=17209$
$x=12809$	$y=17191$	$x=12841$	$y=17159$	$x=12893$	$y=17107$
$x=12907$	$y=17093$	$x=12923$	$y=17077$	$x=12953$	$y=17047$
$x=12959$	$y=17041$	$x=12967$	$y=17033$	$x=12973$	$y=17027$
$x=12979$	$y=17021$	$x=13007$	$y=16993$	$x=13037$	$y=16963$
$x=13063$	$y=16937$	$x=13099$	$y=16901$	$x=13121$	$y=16879$

$x=13171$	$y=16829$	$x=13177$	$y=16823$	$x=13241$	$y=16759$
$x=13259$	$y=16741$	$x=13297$	$y=16703$	$x=13309$	$y=16691$
$x=13327$	$y=16673$	$x=13339$	$y=16661$	$x=13367$	$y=16633$
$x=13381$	$y=16619$	$x=13397$	$y=16603$	$x=13513$	$y=16487$
$x=13523$	$y=16477$	$x=13553$	$y=16447$	$x=13567$	$y=16433$
$x=13619$	$y=16381$	$x=13681$	$y=16319$	$x=13751$	$y=16249$
$x=13807$	$y=16193$	$x=13859$	$y=16141$	$x=13873$	$y=16127$
$x=13903$	$y=16097$	$x=13913$	$y=16087$	$x=13931$	$y=16069$
$x=13933$	$y=16067$	$x=13967$	$y=16033$	$x=13999$	$y=16001$
$x=14009$	$y=15991$	$x=14029$	$y=15971$	$x=14081$	$y=15919$
$x=14087$	$y=15913$	$x=14177$	$y=15823$	$x=14197$	$y=15803$
$x=14251$	$y=15749$	$x=14321$	$y=15679$	$x=14419$	$y=15581$
$x=14431$	$y=15569$	$x=14449$	$y=15551$	$x=14489$	$y=15511$
$x=14503$	$y=15497$	$x=14533$	$y=15467$	$x=14549$	$y=15451$
$x=14557$	$y=15443$	$x=14561$	$y=15439$	$x=14627$	$y=15373$
$x=14639$	$y=15361$	$x=14669$	$y=15331$	$x=14713$	$y=15287$
$x=14723$	$y=15277$	$x=14731$	$y=15269$	$x=14737$	$y=15263$
$x=14741$	$y=15259$	$x=14759$	$y=15241$	$x=14767$	$y=15233$
$x=14783$	$y=15217$	$x=14813$	$y=15187$	$x=14827$	$y=15173$
$x=14851$	$y=15149$	$x=14869$	$y=15131$	$x=14879$	$y=15121$
$x=14923$	$y=15077$	$x=14939$	$y=15061$	$x=14947$	$y=15053$
$x=14969$	$y=15031$	$x=14983$	$y=15017$		

附表 200000 以内的素数表

000002	000003	000005	000007	000011	000013	000017	000019
000023	000029	000031	000037	000041	000043	000047	000053
000059	000061	000067	000071	000073	000079	000083	000089
000097	000101	000103	000107	000109	000113	000127	000131
000137	000139	000149	000151	000157	000163	000167	000173
000179	000181	000191	000193	000197	000199	000211	000223
000227	000229	000233	000239	000241	000251	000257	000263
000269	000271	000277	000281	000283	000293	000307	000311
000313	000317	000331	000337	000347	000349	000353	000359
000367	000373	000379	000383	000389	000397	000401	000409
000419	000421	000431	000433	000439	000443		
000449	000457	000461	000463	000467	000479	000487	000491
000499	000503	000509	000521	000523	000541	000547	000557
000563	000569	000571	000577	000587	000593	000599	000601
000607	000613	000617	000619	000631	000641	000643	000647
000653	000659	000661	000673	000677	000683	000691	000701
000709	000719	000727	000733	000739	000743	000751	000757
000761	000769	000773	000787	000797	000809	000811	000821
000823	000827	000829	000839	000853	000857	000859	000863
000877	000881	000883	000887	000907	000911	000919	000929
000937	000941	000947	000953	000967	000971	000977	000983
000991	000997	001009	001013	001019	001021	001031	001033
001039	001049	001051	001061	001063	001069	001087	001091
001093	001097	001103	001109	001117	001123	001129	001151
001153	001163	001171	001181	001187	001193	001201	001213
001217	001223	001229	001231	001237	001249	001259	001277
001279	001283	001289	001291	001297	001301	001303	001307

001319	001321	001327	001361	001367	001373	001381	001399
001409	001423	001427	001429	001433	001439	001447	001451
001453	001459	001471	001481	001483	001487	001489	001493
001499	001511	001523	001531	001543	001549	001553	001559
001567	001571	001579	001583	001597	001601	001607	001609
001613	001619	001621	001627	001637	001657	001663	001667
001669	001693	001697	001699	001709	001721	001723	001733
001741	001747	001753	001759	001777	001783	001787	001789
001801	001811	001823	001831	001847	001861	001867	001871
001873	001877	001879	001889	001901	001907	001913	001931
001933	001949	001951	001973	001979	001987	001993	001997
001999	002003	002011	002017	002027	002029	002039	002053
002063	002069	002081	002083	002087	002089	002099	002111
002113	002129	002131	002137	002141	002143	002153	002161
002179	002203	002207	002213	002221	002237	002239	002243
002251	002267	002269	002273	002281	002287	002293	002297
002309	002311	002333	002339	002341	002347	002351	002357
002371	002377	002381	002383	002389	002393	002399	002411
002417	002423	002437	002441	002447	002459	002467	002473
002477	002503	002521	002531	002539	002543	002549	002551
002557	002579	002591	002593	002609	002617	002621	002633
002647	002657	002659	002663	002671	002677	002683	002687
002689	002693	002699	002707	002711	002713	002719	002729
002731	002741	002749	002753	002767	002777	002789	002791
002797	002801	002803	002819	002833	002837	002843	002851
002857	002861	002879	002887	002897	002903	002909	002917
002927	002939	002953	002957	002963	002969	002971	002999
003001	003011	003019	003023	003037	003041	003049	003061
003067	003079	003083	003089	003109	003119	003121	003137
003163	003167	003169	003181	003187	003191	003203	003209
003217	003221	003229	003251	003253	003257	003259	003271

003299	003301	003307	003313	003319	003323	003329	003331
003343	003347	003359	003361	003371	003373	003389	003391
003407	003413	003433	003449	003457	003461	003463	003467
003469	003491	003499	003511	003517	003527	003529	003533
003539	003541	003547	003557	003559	003571	003581	003583
003593	003607	003613	003617	003623	003631	003637	003643
003659	003671	003673	003677	003691	003697	003701	003709
003719	003727	003733	003739	003761	003767	003769	003779
003793	003797	003803	003821	003823	003833	003847	003851
003853	003863	003877	003881	003889	003907	003911	003917
003919	003923	003929	003931	003943	003947	003967	003989
004001	004003	004007	004013	004019	004021	004027	004049
004051	004057	004073	004079	004091	004093	004099	004111
004127	004129	004133	004139	004153	004157	004159	004177
004201	004211	004217	004219	004229	004231	004241	004243
004253	004259	004261	004271	004273	004283	004289	004297
004327	004337	004339	004349	004357	004363	004373	004391
004397	004409	004421	004423	004441	004447	004451	004457
004463	004481	004483	004493	004507	004513	004517	004519
004523	004547	004549	004561	004567	004583	004591	004597
004603	004621	004637	004639	004643	004649	004651	004657
004663	004673	004679	004691	004703	004721	004723	004729
004733	004751	004759	004783	004787	004789	004793	004799
004801	004813	004817	004831	004861	004871	004877	004889
004903	004909	004919	004931	004933	004937	004943	004951
004957	004967	004969	004973	004987	004993	004999	005003
005009	005011	005021	005023	005039	005051	005059	005077
005081	005087	005099	005101	005107	005113	005119	005147
005153	005167	005171	005179	005189	005197	005209	005227
005231	005233	005237	005261	005273	005279	005281	005297
005303	005309	005323	005333	005347	005351	005381	005387

005393	005399	005407	005413	005417	005419	005431	005437
005441	005443	005449	005471	005477	005479	005483	005501
005503	005507	005519	005521	005527	005531	005557	005563
005569	005573	005581	005591	005623	005639	005641	005647
005651	005653	005657	005659	005669	005683	005689	005693
005701	005711	005717	005737	005741	005743	005749	005779
005783	005791	005801	005807	005813	005821	005827	005839
005843	005849	005851	005857	005861	005867	005869	005879
005881	005897	005903	005923	005927	005939	005953	005981
005987	006007	006011	006029	006037	006043	006047	006053
006067	006073	006079	006089	006091	006101	006113	006121
006131	006133	006143	006151	006163	006173	006197	006199
006203	006211	006217	006221	006229	006247	006257	006263
006269	006271	006277	006287	006299	006301	006311	006317
006323	006329	006337	006343	006353	006359	006361	006367
006373	006379	006389	006397	006421	006427	006449	006451
006469	006473	006481	006491	006521	006529	006547	006551
006553	006563	006569	006571	006577	006581	006599	006607
006619	006637	006653	006659	006661	006673	006679	006689
006691	006701	006703	006709	006719	006733	006737	006761
006763	006779	006781	006791	006793	006803	006823	006827
006829	006833	006841	006857	006863	006869	006871	006883
006899	006907	006911	006917	006947	006949	006959	006961
006967	006971	006977	006983	006991	006997	007001	007013
007019	007027	007039	007043	007057	007069	007079	007103
007109	007121	007127	007129	007151	007159	007177	007187
007193	007207	007211	007213	007219	007229	007237	007243
007247	007253	007283	007297	007307	007309	007321	007331
007333	007349	007351	007369	007393	007411	007417	007433
007451	007457	007459	007477	007481	007487	007489	007499
007507	007517	007523	007529	007537	007541	007547	007549

007559	007561	007573	007577	007583	007589	007591	007603
007607	007621	007639	007643	007649	007669	007673	007681
007687	007691	007699	007703	007717	007723	007727	007741
007753	007757	007759	007789	007793	007817	007823	007829
007841	007853	007867	007873	007877	007879	007883	007901
007907	007919	007927	007933	007937	007949	007951	007963
007993	008009	008011	008017	008039	008053	008059	008069
008081	008087	008089	008093	008101	008111	008117	008123
008147	008161	008167	008171	008179	008191	008209	008219
008221	008231	008233	008237	008243	008263	008269	008273
008287	008291	008293	008297	008311	008317	008329	008353
008363	008369	008377	008387	008389	008419	008423	008429
008431	008443	008447	008461	008467	008501	008513	008521
008527	008537	008539	008543	008563	008573	008581	008597
008599	008609	008623	008627	008629	008641	008647	008663
008669	008677	008681	008689	008693	008699	008707	008713
008719	008731	008737	008741	008747	008753	008761	008779
008783	008803	008807	008819	008821	008831	008837	008839
008849	008861	008863	008867	008887	008893	008923	008929
008933	008941	008951	008963	008969	008971	008999	009001
009007	009011	009013	009029	009041	009043	009049	009059
009067	009091	009103	009109	009127	009133	009137	009151
009157	009161	009173	009181	009187	009199	009203	009209
009221	009227	009239	009241	009257	009277	009281	009283
009293	009311	009319	009323	009337	009341	009343	009349
009371	009377	009391	009397	009403	009413	009419	009421
009431	009433	009437	009439	009461	009463	009467	009473
009479	009491	009497	009511	009521	009533	009539	009547
009551	009587	009601	009613	009619	009623	009629	009631
009643	009649	009661	009677	009679	009689	009697	009719
009721	009733	009739	009743	009749	009767	009769	009781

009787	009791	009803	009811	009817	009829	009833	009839
009851	009857	009859	009871	009883	009887	009901	009907
009923	009929	009931	009941	009949	009967	009973	010007
010009	010037	010039	010061	010067	010069	010079	010091
010093	010099	010103	010111	010133	010139	010141	010151
010159	010163	010169	010177	010181	010193	010211	010223
010243	010247	010253	010259	010267	010271	010273	010289
010301	010303	010313	010321	010331	010333	010337	010343
010357	010369	010391	010399	010427	010429	010433	010453
010457	010459	010463	010477	010487	010499	010501	010513
010529	010531	010559	010567	010589	010597	010601	010607
010613	010627	010631	010639	010651	010657	010663	010667
010687	010691	010709	010711	010723	010729	010733	010739
010753	010771	010781	010789	010799	010831	010837	010847
010853	010859	010861	010867	010883	010889	010891	010903
010909	010937	010939	010949	010957	010973	010979	010987
010993	011003	011027	011047	011057	011059	011069	011071
011083	011087	011093	011113	011117	011119	011131	011149
011159	011161	011171	011173	011177	011197	011213	011239
011243	011251	011257	011261	011273	011279	011287	011299
011311	011317	011321	011329	011351	011353	011369	011383
011393	011399	011411	011423	011437	011443	011447	011467
011471	011483	011489	011491	011497	011503	011519	011527
011549	011551	011579	011587	011593	011597	011617	011621
011633	011657	011677	011681	011689	011699	011701	011717
011719	011731	011743	011777	011779	011783	011789	011801
011807	011813	011821	011827	011831	011833	011839	011863
011867	011887	011897	011903	011909	011923	011927	011933
011939	011941	011953	011959	011969	011971	011981	011987
012007	012011	012037	012041	012043	012049	012071	012073
012097	012101	012107	012109	012113	012119	012143	012149

012157 012161 012163 012197 012203 012211 012227 012239
012241 012251 012253 012263 012269 012277 012281 012289
012301 012323 012329 012343 012347 012373 012377 012379
012391 012401 012409 012413 012421 012433 012437 012451
012457 012473 012479 012487 012491 012497 012503 012511
012517 012527 012539 012541 012547 012553 012569 012577
012583 012589 012601 012611 012613 012619 012637 012641
012647 012653 012659 012671 012689 012697 012703 012713
012721 012739 012743 012757 012763 012781 012791 012799
012809 012821 012823 012829 012841 012853 012889 012893
012899 012907 012911 012917 012919 012923 012941 012953
012959 012967 012973 012979 012983 013001 013003 013007
013009 013033 013037 013043 013049 013063 013093 013099
013103 013109 013121 013127 013147 013151 013159 013163
013171 013177 013183 013187 013217 013219 013229 013241
013249 013259 013267 013291 013297 013309 013313 013327
013331 013337 013339 013367 013381 013397 013399 013411
013417 013421 013441 013451 013457 013463 013469 013477
013487 013499 013513 013523 013537 013553 013567 013577
013591 013597 013613 013619 013627 013633 013649 013669
013679 013681 013687 013691 013693 013697 013709 013711
013721 013723 013729 013751 013757 013759 013763 013781
013789 013799 013807 013829 013831 013841 013859 013873
013877 013879 013883 013901 013903 013907 013913 013921
013931 013933 013963 013967 013997 013999 014009 014011
014029 014033 014051 014057 014071 014081 014083 014087
014107 014143 014149 014153 014159 014173 014177 014197
014207 014221 014243 014249 014251 014281 014293 014303
014321 014323 014327 014341 014347 014369 014387 014389
014401 014407 014411 014419 014423 014431 014437 014447
014449 014461 014479 014489 014503 014519 014533 014537

014543	014549	014551	014557	014561	014563	014591	014593
014621	014627	014629	014633	014639	014653	014657	014669
014683	014699	014713	014717	014723	014731	014737	014741
014747	014753	014759	014767	014771	014779	014783	014797
014813	014821	014827	014831	014843	014851	014867	014869
014879	014887	014891	014897	014923	014929	014939	014947
014951	014957	014969	014983	015013	015017	015031	015053
015061	015073	015077	015083	015091	015101	015107	015121
015131	015137	015139	015149	015161	015173	015187	015193
015199	015217	015227	015233	015241	015259	015263	015269
015271	015277	015287	015289	015299	015307	015313	015319
015329	015331	015349	015359	015361	015373	015377	015383
015391	015401	015413	015427	015439	015443	015451	015461
015467	015473	015493	015497	015511	015527	015541	015551
015559	015569	015581	015583	015601	015607	015619	015629
015641	015643	015647	015649	015661	015667	015671	015679
015683	015727	015731	015733	015737	015739	015749	015761
015767	015773	015787	015791	015797	015803	015809	015817
015823	015859	015877	015881	015887	015889	015901	015907
015913	015919	015923	015937	015959	015971	015973	015991
016001	016007	016033	016057	016061	016063	016067	016069
016073	016087	016091	016097	016103	016111	016127	016139
016141	016183	016187	016189	016193	016217	016223	016229
016231	016249	016253	016267	016273	016301	016319	016333
016339	016349	016361	016363	016369	016381	016411	016417
016421	016427	016433	016447	016451	016453	016477	016481
016487	016493	016519	016529	016547	016553	016561	016567
016573	016603	016607	016619	016631	016633	016649	016651
016657	016661	016673	016691	016693	016699	016703	016729
016741	016747	016759	016763	016787	016811	016823	016829
016831	016843	016871	016879	016883	016889	016901	016903

016921	016927	016931	016937	016943	016963	016979	016981
016987	016993	017011	017021	017027	017029	017033	017041
017047	017053	017077	017093	017099	017107	017117	017123
017137	017159	017167	017183	017189	017191	017203	017207
017209	017231	017239	017257	017291	017293	017299	017317
017321	017327	017333	017341	017351	017359	017377	017383
017387	017389	017393	017401	017417	017419	017431	017443
017449	017467	017471	017477	017483	017489	017491	017497
017509	017519	017539	017551	017569	017573	017579	017581
017597	017599	017609	017623	017627	017657	017659	017669
017681	017683	017707	017713	017729	017737	017747	017749
017761	017783	017789	017791	017807	017827	017837	017839
017851	017863	017881	017891	017903	017909	017911	017921
017923	017929	017939	017957	017959	017971	017977	017981
017987	017989	018013	018041	018043	018047	018049	018059
018061	018077	018089	018097	018119	018121	018127	018131
018133	018143	018149	018169	018181	018191	018199	018211
018217	018223	018229	018233	018251	018253	018257	018269
018287	018289	018301	018307	018311	018313	018329	018341
018353	018367	018371	018379	018397	018401	018413	018427
018433	018439	018443	018451	018457	018461	018481	018493
018503	018517	018521	018523	018539	018541	018553	018583
018587	018593	018617	018637	018661	018671	018679	018691
018701	018713	018719	018731	018743	018749	018757	018773
018787	018793	018797	018803	018839	018859	018869	018899
018911	018913	018917	018919	018947	018959	018973	018979
019001	019009	019013	019031	019037	019051	019069	019073
019079	019081	019087	019121	019139	019141	019157	019163
019181	019183	019207	019211	019213	019219	019231	019237
019249	019259	019267	019273	019289	019301	019309	019319
019333	019373	019379	019381	019387	019391	019403	019417

019421	019423	019427	019429	019433	019441	019447	019457
019463	019469	019471	019477	019483	019489	019501	019507
019531	019541	019543	019553	019559	019571	019577	019583
019597	019603	019609	019661	019681	019687	019697	019699
019709	019717	019727	019739	019751	019753	019759	019763
019777	019793	019801	019813	019819	019841	019843	019853
019861	019867	019889	019891	019913	019919	019927	019937
019949	019961	019963	019973	019979	019991	019993	019997
020011	020021	020023	020029	020047	020051	020063	020071
020089	020101	020107	020113	020117	020123	020129	020143
020147	020149	020161	020173	020177	020183	020201	020219
020231	020233	020249	020261	020269	020287	020297	020323
020327	020333	020341	020347	020353	020357	020359	020369
020389	020393	020399	020407	020411	020431	020441	020443
020477	020479	020483	020507	020509	020521	020533	020543
020549	020551	020563	020593	020599	020611	020627	020639
020641	020663	020681	020693	020707	020717	020719	020731
020743	020747	020749	020753	020759	020771	020773	020789
020807	020809	020849	020857	020873	020879	020887	020897
020899	020903	020921	020929	020939	020947	020959	020963
020981	020983	021001	021011	021013	021017	021019	021023
021031	021059	021061	021067	021089	021101	021107	021121
021139	021143	021149	021157	021163	021169	021179	021187
021191	021193	021211	021221	021227	021247	021269	021277
021283	021313	021317	021319	021323	021341	021347	021377
021379	021383	021391	021397	021401	021407	021419	021433
021467	021481	021487	021491	021493	021499	021503	021517
021521	021523	021529	021557	021559	021563	021569	021577
021587	021589	021599	021601	021611	021613	021617	021647
021649	021661	021673	021683	021701	021713	021727	021737
021739	021751	021757	021767	021773	021787	021799	021803

021817	021821	021839	021841	021851	021859	021863	021871
021881	021893	021911	021929	021937	021943	021961	021977
021991	021997	022003	022013	022027	022031	022037	022039
022051	022063	022067	022073	022079	022091	022093	022109
022111	022123	022129	022133	022147	022153	022157	022159
022171	022189	022193	022229	022247	022259	022271	022273
022277	022279	022283	022291	022303	022307	022343	022349
022367	022369	022381	022391	022397	022409	022433	022441
022447	022453	022469	022481	022483	022501	022511	022531
022541	022543	022549	022567	022571	022573	022613	022619
022621	022637	022639	022643	022651	022669	022679	022691
022697	022699	022709	022717	022721	022727	022739	022741
022751	022769	022777	022783	022787	022807	022811	022817
022853	022859	022861	022871	022877	022901	022907	022921
022937	022943	022961	022963	022973	022993	023003	023011
023017	023021	023027	023029	023039	023041	023053	023057
023059	023063	023071	023081	023087	023099	023117	023131
023143	023159	023167	023173	023189	023197	023201	023203
023209	023227	023251	023269	023279	023291	023293	023297
023311	023321	023327	023333	023339	023357	023369	023371
023399	023417	023431	023447	023459	023473	023497	023509
023531	023537	023539	023549	023557	023561	023563	023567
023581	023593	023599	023603	023609	023623	023627	023629
023633	023663	023669	023671	023677	023687	023689	023719
023741	023743	023747	023753	023761	023767	023773	023789
023801	023813	023819	023827	023831	023833	023857	023869
023873	023879	023887	023893	023899	023909	023911	023917
023929	023957	023971	023977	023981	023993	024001	024007
024019	024023	024029	024043	024049	024061	024071	024077
024083	024091	024097	024103	024107	024109	024113	024121
024133	024137	024151	024169	024179	024181	024197	024203

024223	024229	024239	024247	024251	024281	024317	024329
024337	024359	024371	024373	024379	024391	024407	024413
024419	024421	024439	024443	024469	024473	024481	024499
024509	024517	024527	024533	024547	024551	024571	024593
024611	024623	024631	024659	024671	024677	024683	024691
024697	024709	024733	024749	024763	024767	024781	024793
024799	024809	024821	024841	024847	024851	024859	024877
024889	024907	024917	024919	024923	024943	024953	024967
024971	024977	024979	024989	025013	025031	025033	025037
025057	025073	025087	025097	025111	025117	025121	025127
025147	025153	025163	025169	025171	025183	025189	025219
025229	025237	025243	025247	025253	025261	025301	025303
025307	025309	025321	025339	025343	025349	025357	025367
025373	025391	025409	025411	025423	025439	025447	025453
025457	025463	025469	025471	025523	025537	025541	025561
025577	025579	025583	025589	025601	025603	025609	025621
025633	025639	025643	025657	025667	025673	025679	025693
025703	025717	025733	025741	025747	025759	025763	025771
025793	025799	025801	025819	025841	025847	025849	025867
025873	025889	025903	025913	025919	025931	025933	025939
025943	025951	025969	025981	025997	025999	026003	026017
026021	026029	026041	026053	026083	026099	026107	026111
026113	026119	026141	026153	026161	026171	026177	026183
026189	026203	026209	026227	026237	026249	026251	026261
026263	026267	026293	026297	026309	026317	026321	026339
026347	026357	026371	026387	026393	026399	026407	026417
026423	026431	026437	026449	026459	026479	026489	026497
026501	026513	026539	026557	026561	026573	026591	026597
026627	026633	026641	026647	026669	026681	026683	026687
026693	026699	026701	026711	026713	026717	026723	026729
026731	026737	026759	026777	026783	026801	026813	026821

026833	026839	026849	026861	026863	026879	026881	026891
026893	026903	026921	026927	026947	026951	026953	026959
026981	026987	026993	027011	027017	027031	027043	027059
027061	027067	027073	027077	027091	027103	027107	027109
027127	027143	027179	027191	027197	027211	027239	027241
027253	027259	027271	027277	027281	027283	027299	027329
027337	027361	027367	027397	027407	027409	027427	027431
027437	027449	027457	027479	027481	027487	027509	027527
027529	027539	027541	027551	027581	027583	027611	027617
027631	027647	027653	027673	027689	027691	027697	027701
027733	027737	027739	027743	027749	027751	027763	027767
027773	027779	027791	027793	027799	027803	027809	027817
027823	027827	027847	027851	027883	027893	027901	027917
027919	027941	027943	027947	027953	027961	027967	027983
027997	028001	028019	028027	028031	028051	028057	028069
028081	028087	028097	028099	028109	028111	028123	028151
028163	028181	028183	028201	028211	028219	028229	028277
028279	028283	028289	028297	028307	028309	028319	028349
028351	028387	028393	028403	028409	028411	028429	028433
028439	028447	028463	028477	028493	028499	028513	028517
028537	028541	028547	028549	028559	028571	028573	028579
028591	028597	028603	028607	028619	028621	028627	028631
028643	028649	028657	028661	028663	028669	028687	028697
028703	028711	028723	028729	028751	028753	028759	028771
028789	028793	028807	028813	028817	028837	028843	028859
028867	028871	028879	028901	028909	028921	028927	028933
028949	028961	028979	029009	029017	029021	029023	029027
029033	029059	029063	029077	029101	029123	029129	029131
029137	029147	029153	029167	029173	029179	029191	029201
029207	029209	029221	029231	029243	029251	029269	029287
029297	029303	029311	029327	029333	029339	029347	029363

029383	029387	029389	029399	029401	029411	029423	029429
029437	029443	029453	029473	029483	029501	029527	029531
029537	029567	029569	029573	029581	029587	029599	029611
029629	029633	029641	029663	029669	029671	029683	029717
029723	029741	029753	029759	029761	029789	029803	029819
029833	029837	029851	029863	029867	029873	029879	029881
029917	029921	029927	029947	029959	029983	029989	030011
030013	030029	030047	030059	030071	030089	030091	030097
030103	030109	030113	030119	030133	030137	030139	030161
030169	030181	030187	030197	030203	030211	030223	030241
030253	030259	030269	030271	030293	030307	030313	030319
030323	030341	030347	030367	030389	030391	030403	030427
030431	030449	030467	030469	030491	030493	030497	030509
030517	030529	030539	030553	030557	030559	030577	030593
030631	030637	030643	030649	030661	030671	030677	030689
030697	030703	030707	030713	030727	030757	030763	030773
030781	030803	030809	030817	030829	030839	030841	030851
030853	030859	030869	030871	030881	030893	030911	030931
030937	030941	030949	030971	030977	030983	031013	031019
031033	031039	031051	031063	031069	031079	031081	031091
031121	031123	031139	031147	031151	031153	031159	031177
031181	031183	031189	031193	031219	031223	031231	031237
031247	031249	031253	031259	031267	031271	031277	031307
031319	031321	031327	031333	031337	031357	031379	031387
031391	031393	031397	031469	031477	031481	031489	031511
031513	031517	031531	031541	031543	031547	031567	031573
031583	031601	031607	031627	031643	031649	031657	031663
031667	031687	031699	031721	031723	031727	031729	031741
031751	031769	031771	031793	031799	031817	031847	031849
031859	031873	031883	031891	031907	031957	031963	031973

031981	031991	032003	032009	032027	032029	032051	032057
032059	032063	032069	032077	032083	032089	032099	032117
032119	032141	032143	032159	032173	032183	032189	032191
032203	032213	032233	032237	032251	032257	032261	032297
032299	032303	032309	032321	032323	032327	032341	032353
032359	032363	032369	032371	032377	032381	032401	032411
032413	032423	032429	032441	032443	032467	032479	032491
032497	032503	032507	032531	032533	032537	032561	032563
032569	032573	032579	032587	032603	032609	032611	032621
032633	032647	032653	032687	032693	032707	032713	032717
032719	032749	032771	032779	032783	032789	032797	032801
032803	032831	032833	032839	032843	032869	032887	032909
032911	032917	032933	032939	032941	032957	032969	032971
032983	032987	032993	032999	033013	033023	033029	033037
033049	033053	033071	033073	033083	033091	033107	033113
033119	033149	033151	033161	033179	033181	033191	033199
033203	033211	033223	033247	033287	033289	033301	033311
033317	033329	033331	033343	033347	033349	033353	033359
033377	033391	033403	033409	033413	033427	033457	033461
033469	033479	033487	033493	033503	033521	033529	033533
033547	033563	033569	033577	033581	033587	033589	033599
033601	033613	033617	033619	033623	033629	033637	033641
033647	033679	033703	033713	033721	033739	033749	033751
033757	033767	033769	033773	033791	033797	033809	033811
033827	033829	033851	033857	033863	033871	033889	033893
033911	033923	033931	033937	033941	033961	033967	033997
034019	034031	034033	034039	034057	034061	034123	034127
034129	034141	034147	034157	034159	034171	034183	034211
034213	034217	034231	034253	034259	034261	034267	034273
034283	034297	034301	034303	034313	034319	034327	034337
034351	034361	034367	034369	034381	034403	034421	034429

034439	034457	034469	034471	034483	034487	034499	034501
034511	034513	034519	034537	034543	034549	034583	034589
034591	034603	034607	034613	034631	034649	034651	034667
034673	034679	034687	034693	034703	034721	034729	034739
034747	034757	034759	034763	034781	034807	034819	034841
034843	034847	034849	034871	034877	034883	034897	034913
034919	034939	034949	034961	034963	034981	035023	035027
035051	035053	035059	035069	035081	035083	035089	035099
035107	035111	035117	035129	035141	035149	035153	035159
035171	035201	035221	035227	035251	035257	035267	035279
035281	035291	035311	035317	035323	035327	035339	035353
035363	035381	035393	035401	035407	035419	035423	035437
035447	035449	035461	035491	035507	035509	035521	035527
035531	035533	035537	035543	035569	035573	035591	035593
035597	035603	035617	035671	035677	035729	035731	035747
035753	035759	035771	035797	035801	035803	035809	035831
035837	035839	035851	035863	035869	035879	035897	035899
035911	035923	035933	035951	035963	035969	035977	035983
035993	035999	036007	036011	036013	036017	036037	036061
036067	036073	036083	036097	036107	036109	036131	036137
036151	036161	036187	036191	036209	036217	036229	036241
036251	036263	036269	036277	036293	036299	036307	036313
036319	036341	036343	036353	036373	036383	036389	036433
036451	036457	036467	036469	036473	036479	036493	036497
036523	036527	036529	036541	036551	036559	036563	036571
036583	036587	036599	036607	036629	036637	036643	036653
036671	036677	036683	036691	036697	036709	036713	036721
036739	036749	036761	036767	036779	036781	036787	036791
036793	036809	036821	036833	036847	036857	036871	036877
036887	036899	036901	036913	036919	036923	036929	036931
036943	036947	036973	036979	036997	037003	037013	037019

037021	037039	037049	037057	037061	037087	037097	037117
037123	037139	037159	037171	037181	037189	037199	037201
037217	037223	037243	037253	037273	037277	037307	037309
037313	037321	037337	037339	037357	037361	037363	037369
037379	037397	037409	037423	037441	037447	037463	037483
037489	037493	037501	037507	037511	037517	037529	037537
037547	037549	037561	037567	037571	037573	037579	037589
037591	037607	037619	037633	037643	037649	037657	037663
037691	037693	037699	037717	037747	037781	037783	037799
037811	037813	037831	037847	037853	037861	037871	037879
037889	037897	037907	037951	037957	037963	037967	037987
037991	037993	037997	038011	038039	038047	038053	038069
038083	038113	038119	038149	038153	038167	038177	038183
038189	038197	038201	038219	038231	038237	038239	038261
038273	038281	038287	038299	038303	038317	038321	038327
038329	038333	038351	038371	038377	038393	038431	038447
038449	038453	038459	038461	038501	038543	038557	038561
038567	038569	038593	038603	038609	038611	038629	038639
038651	038653	038669	038671	038677	038693	038699	038707
038711	038713	038723	038729	038737	038747	038749	038767
038783	038791	038803	038821	038833	038839	038851	038861
038867	038873	038891	038903	038917	038921	038923	038933
038953	038959	038971	038977	038993	039019	039023	039041
039043	039047	039079	039089	039097	039103	039107	039113
039119	039133	039139	039157	039161	039163	039181	039191
039199	039209	039217	039227	039229	039233	039239	039241
039251	039293	039301	039313	039317	039323	039341	039343
039359	039367	039371	039373	039383	039397	039409	039419
039439	039443	039451	039461	039499	039503	039509	039511
039521	039541	039551	039563	039569	039581	039607	039619
039623	039631	039659	039667	039671	039679	039703	039709

039719	039727	039733	039749	039761	039769	039779	039791
039799	039821	039827	039829	039839	039841	039847	039857
039863	039869	039877	039883	039887	039901	039929	039937
039953	039971	039979	039983	039989	040009	040013	040031
040037	040039	040063	040087	040093	040099	040111	040123
040127	040129	040151	040153	040163	040169	040177	040189
040193	040213	040231	040237	040241	040253	040277	040283
040289	040343	040351	040357	040361	040387	040423	040427
040429	040433	040459	040471	040483	040487	040493	040499
040507	040519	040529	040531	040543	040559	040577	040583
040591	040597	040609	040627	040637	040639	040693	040697
040699	040709	040739	040751	040759	040763	040771	040787
040801	040813	040819	040823	040829	040841	040847	040849
040853	040867	040879	040883	040897	040903	040927	040933
040939	040949	040961	040973	040993	041011	041017	041023
041039	041047	041051	041057	041077	041081	041113	041117
041131	041141	041143	041149	041161	041177	041179	041183
041189	041201	041203	041213	041221	041227	041231	041233
041243	041257	041263	041269	041281	041299	041333	041341
041351	041357	041381	041387	041389	041399	041411	041413
041443	041453	041467	041479	041491	041507	041513	041519
041521	041539	041543	041549	041579	041593	041597	041603
041609	041611	041617	041621	041627	041641	041647	041651
041659	041669	041681	041687	041719	041729	041737	041759
041761	041771	041777	041801	041809	041813	041843	041849
041851	041863	041879	041887	041893	041897	041903	041911
041927	041941	041947	041953	041957	041959	041969	041981
041983	041999	042013	042017	042019	042023	042043	042061
042071	042073	042083	042089	042101	042131	042139	042157
042169	042179	042181	042187	042193	042197	042209	042221
042223	042227	042239	042257	042281	042283	042293	042299

042307	042323	042331	042337	042349	042359	042373	042379
042391	042397	042403	042407	042409	042433	042437	042443
042451	042457	042461	042463	042467	042473	042487	042491
042499	042509	042533	042557	042569	042571	042577	042589
042611	042641	042643	042649	042667	042677	042683	042689
042697	042701	042703	042709	042719	042727	042737	042743
042751	042767	042773	042787	042793	042797	042821	042829
042839	042841	042853	042859	042863	042899	042901	042923
042929	042937	042943	042953	042961	042967	042979	042989
043003	043013	043019	043037	043049	043051	043063	043067
043093	043103	043117	043133	043151	043159	043177	043189
043201	043207	043223	043237	043261	043271	043283	043291
043313	043319	043321	043331	043391	043397	043399	043403
043411	043427	043441	043451	043457	043481	043487	043499
043517	043541	043543	043573	043577	043579	043591	043597
043607	043609	043613	043627	043633	043649	043651	043661
043669	043691	043711	043717	043721	043753	043759	043777
043781	043783	043787	043789	043793	043801	043853	043867
043889	043891	043913	043933	043943	043951	043961	043963
043969	043973	043987	043991	043997	044017	044021	044027
044029	044041	044053	044059	044071	044087	044089	044101
044111	044119	044123	044129	044131	044159	044171	044179
044189	044201	044203	044207	044221	044249	044257	044263
044267	044269	044273	044279	044281	044293	044351	044357
044371	044381	044383	044389	044417	044449	044453	044483
044491	044497	044501	044507	044519	044531	044533	044537
044543	044549	044563	044579	044587	044617	044621	044623
044633	044641	044647	044651	044657	044683	044687	044699
044701	044711	044729	044741	044753	044771	044773	044777
044789	044797	044809	044819	044839	044843	044851	044867
044879	044887	044893	044909	044917	044927	044939	044953

044959	044963	044971	044983	044987	045007	045013	045053
045061	045077	045083	045119	045121	045127	045131	045137
045139	045161	045179	045181	045191	045197	045233	045247
045259	045263	045281	045289	045293	045307	045317	045319
045329	045337	045341	045343	045361	045377	045389	045403
045413	045427	045433	045439	045481	045491	045497	045503
045523	045533	045541	045553	045557	045569	045587	045589
045599	045613	045631	045641	045659	045667	045673	045677
045691	045697	045707	045737	045751	045757	045763	045767
045779	045817	045821	045823	045827	045833	045841	045853
045863	045869	045887	045893	045943	045949	045953	045959
045971	045979	045989	046021	046027	046049	046051	046061
046073	046091	046093	046099	046103	046133	046141	046147
046153	046171	046181	046183	046187	046199	046219	046229
046237	046261	046271	046273	046279	046301	046307	046309
046327	046337	046349	046351	046381	046399	046411	046439
046441	046447	046451	046457	046471	046477	046489	046499
046507	046511	046523	046549	046559	046567	046573	046589
046591	046601	046619	046633	046639	046643	046649	046663
046679	046681	046687	046691	046703	046723	046727	046747
046751	046757	046769	046771	046807	046811	046817	046819
046829	046831	046853	046861	046867	046877	046889	046901
046919	046933	046957	046993	046997	047017	047041	047051
047057	047059	047087	047093	047111	047119	047123	047129
047137	047143	047147	047149	047161	047189	047207	047221
047237	047251	047269	047279	047287	047293	047297	047303
047309	047317	047339	047351	047353	047363	047381	047387
047389	047407	047417	047419	047431	047441	047459	047491
047497	047501	047507	047513	047521	047527	047533	047543
047563	047569	047581	047591	047599	047609	047623	047629
047639	047653	047657	047659	047681	047699	047701	047711

047713	047717	047737	047741	047743	047777	047779	047791
047797	047807	047809	047819	047837	047843	047857	047869
047881	047903	047911	047917	047933	047939	047947	047951
047963	047969	047977	047981	048017	048023	048029	048049
048073	048079	048091	048109	048119	048121	048131	048157
048163	048179	048187	048193	048197	048221	048239	048247
048259	048271	048281	048299	048311	048313	048337	048341
048353	048371	048383	048397	048407	048409	048413	048437
048449	048463	048473	048479	048481	048487	048491	048497
048523	048527	048533	048539	048541	048563	048571	048589
048593	048611	048619	048623	048647	048649	048661	048673
048677	048679	048731	048733	048751	048757	048761	048767
048779	048781	048787	048799	048809	048817	048821	048823
048847	048857	048859	048869	048871	048883	048889	048907
048947	048953	048973	048989	048991	049003	049009	049019
049031	049033	049037	049043	049057	049069	049081	049103
049109	049117	049121	049123	049139	049157	049169	049171
049177	049193	049199	049201	049207	049211	049223	049253
049261	049277	049279	049297	049307	049331	049333	049339
049363	049367	049369	049391	049393	049409	049411	049417
049429	049433	049451	049459	049463	049477	049481	049499
049523	049529	049531	049537	049547	049549	049559	049597
049603	049613	049627	049633	049639	049663	049667	049669
049681	049697	049711	049727	049739	049741	049747	049757
049783	049787	049789	049801	049807	049811	049823	049831
049843	049853	049871	049877	049891	049919	049921	049927
049937	049939	049943	049957	049991	049993	049999	050021
050023	050033	050047	050051	050053	050069	050077	050087
050093	050101	050111	050119	050123	050129	050131	050147
050153	050159	050177	050207	050221	050227	050231	050261
050263	050273	050287	050291	050311	050321	050329	050333

050341	050359	050363	050377	050383	050387	050411	050417
050423	050441	050459	050461	050497	050503	050513	050527
050539	050543	050549	050551	050581	050587	050591	050593
050599	050627	050647	050651	050671	050683	050707	050723
050741	050753	050767	050773	050777	050789	050821	050833
050839	050849	050857	050867	050873	050891	050893	050909
050923	050929	050951	050957	050969	050971	050989	050993
051001	051031	051043	051047	051059	051061	051071	051109
051131	051133	051137	051151	051157	051169	051193	051197
051199	051203	051217	051229	051239	051241	051257	051263
051283	051287	051307	051329	051341	051343	051347	051349
051361	051383	051407	051413	051419	051421	051427	051431
051437	051439	051449	051461	051473	051479	051481	051487
051503	051511	051517	051521	051539	051551	051563	051577
051581	051593	051599	051607	051613	051631	051637	051647
051659	051673	051679	051683	051691	051713	051719	051721
051749	051767	051769	051787	051797	051803	051817	051827
051829	051839	051853	051859	051869	051871	051893	051899
051907	051913	051929	051941	051949	051971	051973	051977
051991	052009	052021	052027	052051	052057	052067	052069
052081	052103	052121	052127	052147	052153	052163	052177
052181	052183	052189	052201	052223	052237	052249	052253
052259	052267	052289	052291	052301	052313	052321	052361
052363	052369	052379	052387	052391	052433	052453	052457
052489	052501	052511	052517	052529	052541	052543	052553
052561	052567	052571	052579	052583	052609	052627	052631
052639	052667	052673	052691	052697	052709	052711	052721
052727	052733	052747	052757	052769	052783	052807	052813
052817	052837	052859	052861	052879	052883	052889	052901
052903	052919	052937	052951	052957	052963	052967	052973
052981	052999	053003	053017	053047	053051	053069	053077

053087	053089	053093	053101	053113	053117	053129	053147
053149	053161	053171	053173	053189	053197	053201	053231
053233	053239	053267	053269	053279	053281	053299	053309
053323	053327	053353	053359	053377	053381	053401	053407
053411	053419	053437	053441	053453	053479	053503	053507
053527	053549	053551	053569	053591	053593	053597	053609
053611	053617	053623	053629	053633	053639	053653	053657
053681	053693	053699	053717	053719	053731	053759	053773
053777	053783	053791	053813	053819	053831	053849	053857
053861	053881	053887	053891	053897	053899	053917	053923
053927	053939	053951	053959	053987	053993	054001	054011
054013	054037	054049	054059	054083	054091	054101	054121
054133	054139	054151	054163	054167	054181	054193	054217
054251	054269	054277	054287	054293	054311	054319	054323
054331	054347	054361	054367	054371	054377	054401	054403
054409	054413	054419	054421	054437	054443	054449	054469
054493	054497	054499	054503	054517	054521	054539	054541
054547	054559	054563	054577	054581	054583	054601	054617
054623	054629	054631	054647	054667	054673	054679	054709
054713	054721	054727	054751	054767	054773	054779	054787
054799	054829	054833	054851	054869	054877	054881	054907
054917	054919	054941	054949	054959	054973	054979	054983
055001	055009	055021	055049	055051	055057	055061	055073
055079	055103	055109	055117	055127	055147	055163	055171
055201	055207	055213	055217	055219	055229	055243	055249
055259	055291	055313	055331	055333	055337	055339	055343
055351	055373	055381	055399	055411	055439	055441	055457
055469	055487	055501	055511	055529	055541	055547	055579
055589	055603	055609	055619	055621	055631	055633	055639
055661	055663	055667	055673	055681	055691	055697	055711
055717	055721	055733	055763	055787	055793	055799	055807

055813	055817	055819	055823	055829	055837	055843	055849
055871	055889	055897	055901	055903	055921	055927	055931
055933	055949	055967	055987	055997	056003	056009	056039
056041	056053	056081	056087	056093	056099	056101	056113
056123	056131	056149	056167	056171	056179	056197	056207
056209	056237	056239	056249	056263	056267	056269	056299
056311	056333	056359	056369	056377	056383	056393	056401
056417	056431	056437	056443	056453	056467	056473	056477
056479	056489	056501	056503	056509	056519	056527	056531
056533	056543	056569	056591	056597	056599	056611	056629
056633	056659	056663	056671	056681	056687	056701	056711
056713	056731	056737	056747	056767	056773	056779	056783
056807	056809	056813	056821	056827	056843	056857	056873
056891	056893	056897	056909	056911	056921	056923	056929
056941	056951	056957	056963	056983	056989	056993	056999
057037	057041	057047	057059	057073	057077	057089	057097
057107	057119	057131	057139	057143	057149	057163	057173
057179	057191	057193	057203	057221	057223	057241	057251
057259	057269	057271	057283	057287	057301	057329	057331
057347	057349	057367	057373	057383	057389	057397	057413
057427	057457	057467	057487	057493	057503	057527	057529
057557	057559	057571	057587	057593	057601	057637	057641
057649	057653	057667	057679	057689	057697	057709	057713
057719	057727	057731	057737	057751	057773	057781	057787
057791	057793	057803	057809	057829	057839	057847	057853
057859	057881	057899	057901	057917	057923	057943	057947
057973	057977	057991	058013	058027	058031	058043	058049
058057	058061	058067	058073	058099	058109	058111	058129
058147	058151	058153	058169	058171	058189	058193	058199
058207	058211	058217	058229	058231	058237	058243	058271
058309	058313	058321	058337	058363	058367	058369	058379

058391	058393	058403	058411	058417	058427	058439	058441
058451	058453	058477	058481	058511	058537	058543	058549
058567	058573	058579	058601	058603	058613	058631	058657
058661	058679	058687	058693	058699	058711	058727	058733
058741	058757	058763	058771	058787	058789	058831	058889
058897	058901	058907	058909	058913	058921	058937	058943
058963	058967	058979	058991	058997	059009	059011	059021
059023	059029	059051	059053	059063	059069	059077	059083
059093	059107	059113	059119	059123	059141	059149	059159
059167	059183	059197	059207	059209	059219	059221	059233
059239	059243	059263	059273	059281	059333	059341	059351
059357	059359	059369	059377	059387	059393	059399	059407
059417	059419	059441	059443	059447	059453	059467	059471
059473	059497	059509	059513	059539	059557	059561	059567
059581	059611	059617	059621	059627	059629	059651	059659
059663	059669	059671	059693	059699	059707	059723	059729
059743	059747	059753	059771	059779	059791	059797	059809
059833	059863	059879	059887	059921	059929	059951	059957
059971	059981	059999	060013	060017	060029	060037	060041
060077	060083	060089	060091	060101	060103	060107	060127
060133	060139	060149	060161	060167	060169	060209	060217
060223	060251	060257	060259	060271	060289	060293	060317
060331	060337	060343	060353	060373	060383	060397	060413
060427	060443	060449	060457	060493	060497	060509	060521
060527	060539	060589	060601	060607	060611	060617	060623
060631	060637	060647	060649	060659	060661	060679	060689
060703	060719	060727	060733	060737	060757	060761	060763
060773	060779	060793	060811	060821	060859	060869	060887
060889	060899	060901	060913	060917	060919	060923	060937
060943	060953	060961	061001	061007	061027	061031	061043
061051	061057	061091	061099	061121	061129	061141	061151

061153	061169	061211	061223	061231	061253	061261	061283
061291	061297	061331	061333	061339	061343	061357	061363
061379	061381	061403	061409	061417	061441	061463	061469
061471	061483	061487	061493	061507	061511	061519	061543
061547	061553	061559	061561	061583	061603	061609	061613
061627	061631	061637	061643	061651	061657	061667	061673
061681	061687	061703	061717	061723	061729	061751	061757
061781	061813	061819	061837	061843	061861	061871	061879
061909	061927	061933	061949	061961	061967	061979	061981
061987	061991	062003	062011	062017	062039	062047	062053
062057	062071	062081	062099	062119	062129	062131	062137
062141	062143	062171	062189	062191	062201	062207	062213
062219	062233	062273	062297	062299	062303	062311	062323
062327	062347	062351	062383	062401	062417	062423	062459
062467	062473	062477	062483	062497	062501	062507	062533
062539	062549	062563	062581	062591	062597	062603	062617
062627	062633	062639	062653	062659	062683	062687	062701
062723	062731	062743	062753	062761	062773	062791	062801
062819	062827	062851	062861	062869	062873	062897	062903
062921	062927	062929	062939	062969	062971	062981	062983
062987	062989	063029	063031	063059	063067	063073	063079
063097	063103	063113	063127	063131	063149	063179	063197
063199	063211	063241	063247	063277	063281	063299	063311
063313	063317	063331	063337	063347	063353	063361	063367
063377	063389	063391	063397	063409	063419	063421	063439
063443	063463	063467	063473	063487	063493	063499	063521
063527	063533	063541	063559	063577	063587	063589	063599
063601	063607	063611	063617	063629	063647	063649	063659
063667	063671	063689	063691	063697	063703	063709	063719
063727	063737	063743	063761	063773	063781	063793	063799
063803	063809	063823	063839	063841	063853	063857	063863

063901	063907	063913	063929	063949	063977	063997	064007
064013	064019	064033	064037	064063	064067	064081	064091
064109	064123	064151	064153	064157	064171	064187	064189
064217	064223	064231	064237	064271	064279	064283	064301
064303	064319	064327	064333	064373	064381	064399	064403
064433	064439	064451	064453	064483	064489	064499	064513
064553	064567	064577	064579	064591	064601	064609	064613
064621	064627	064633	064661	064663	064667	064679	064693
064709	064717	064747	064763	064781	064783	064793	064811
064817	064849	064853	064871	064877	064879	064891	064901
064919	064921	064927	064937	064951	064969	064997	065003
065011	065027	065029	065033	065053	065063	065071	065089
065099	065101	065111	065119	065123	065129	065141	065147
065167	065171	065173	065179	065183	065203	065213	065239
065257	065267	065269	065287	065293	065309	065323	065327
065353	065357	065371	065381	065393	065407	065413	065419
065423	065437	065447	065449	065479	065497	065519	065521
065537	065539	065543	065551	065557	065563	065579	065581
065587	065599	065609	065617	065629	065633	065647	065651
065657	065677	065687	065699	065701	065707	065713	065717
065719	065729	065731	065761	065777	065789	065809	065827
065831	065837	065839	065843	065851	065867	065881	065899
065921	065927	065929	065951	065957	065963	065981	065983
065993	066029	066037	066041	066047	066067	066071	066083
066089	066103	066107	066109	066137	066161	066169	066173
066179	066191	066221	066239	066271	066293	066301	066337
066343	066347	066359	066361	066373	066377	066383	066403
066413	066431	066449	066457	066463	066467	066491	066499
066509	066523	066529	066533	066541	066553	066569	066571
066587	066593	066601	066617	066629	066643	066653	066683
066697	066701	066713	066721	066733	066739	066749	066751

066763	066791	066797	066809	066821	066841	066851	066853
066863	066877	066883	066889	066919	066923	066931	066943
066947	066949	066959	066973	066977	067003	067021	067033
067043	067049	067057	067061	067073	067079	067103	067121
067129	067139	067141	067153	067157	067169	067181	067187
067189	067211	067213	067217	067219	067231	067247	067261
067271	067273	067289	067307	067339	067343	067349	067369
067391	067399	067409	067411	067421	067427	067429	067433
067447	067453	067477	067481	067489	067493	067499	067511
067523	067531	067537	067547	067559	067567	067577	067579
067589	067601	067607	067619	067631	067651	067679	067699
067709	067723	067733	067741	067751	067757	067759	067763
067777	067783	067789	067801	067807	067819	067829	067843
067853	067867	067883	067891	067901	067927	067931	067933
067939	067943	067957	067961	067967	067979	067987	067993
068023	068041	068053	068059	068071	068087	068099	068111
068113	068141	068147	068161	068171	068207	068209	068213
068219	068227	068239	068261	068279	068281	068311	068329
068351	068371	068389	068399	068437	068443	068447	068449
068473	068477	068483	068489	068491	068501	068507	068521
068531	068539	068543	068567	068581	068597	068611	068633
068639	068659	068669	068683	068687	068699	068711	068713
068729	068737	068743	068749	068767	068771	068777	068791
068813	068819	068821	068863	068879	068881	068891	068897
068899	068903	068909	068917	068927	068947	068963	068993
069001	069011	069019	069029	069031	069061	069067	069073
069109	069119	069127	069143	069149	069151	069163	069191
069193	069197	069203	069221	069233	069239	069247	069257
069259	069263	069313	069317	069337	069341	069371	069379
069383	069389	069401	069403	069427	069431	069439	069457
069463	069467	069473	069481	069491	069493	069497	069499

069539	069557	069593	069623	069653	069661	069677	069691
069697	069709	069737	069739	069761	069763	069767	069779
069809	069821	069827	069829	069833	069847	069857	069859
069877	069899	069911	069929	069931	069941	069959	069991
069997	070001	070003	070009	070019	070039	070051	070061
070067	070079	070099	070111	070117	070121	070123	070139
070141	070157	070163	070177	070181	070183	070199	070201
070207	070223	070229	070237	070241	070249	070271	070289
070297	070309	070313	070321	070327	070351	070373	070379
070381	070393	070423	070429	070439	070451	070457	070459
070481	070487	070489	070501	070507	070529	070537	070549
070571	070573	070583	070589	070607	070619	070621	070627
070639	070657	070663	070667	070687	070709	070717	070729
070753	070769	070783	070793	070823	070841	070843	070849
070853	070867	070877	070879	070891	070901	070913	070919
070921	070937	070949	070951	070957	070969	070979	070981
070991	070997	070999	071011	071023	071039	071059	071069
071081	071089	071119	071129	071143	071147	071153	071161
071167	071171	071191	071209	071233	071237	071249	071257
071261	071263	071287	071293	071317	071327	071329	071333
071339	071341	071347	071353	071359	071363	071387	071389
071399	071411	071413	071419	071429	071437	071443	071453
071471	071473	071479	071483	071503	071527	071537	071549
071551	071563	071569	071593	071597	071633	071647	071663
071671	071693	071699	071707	071711	071713	071719	071741
071761	071777	071789	071807	071809	071821	071837	071843
071849	071861	071867	071879	071881	071887	071899	071909
071917	071933	071941	071947	071963	071971	071983	071987
071993	071999	072019	072031	072043	072047	072053	072073
072077	072089	072091	072101	072103	072109	072139	072161
072167	072169	072173	072211	072221	072223	072227	072229

072251	072253	072269	072271	072277	072287	072307	072313
072337	072341	072353	072367	072379	072383	072421	072431
072461	072467	072469	072481	072493	072497	072503	072533
072547	072551	072559	072577	072613	072617	072623	072643
072647	072649	072661	072671	072673	072679	072689	072701
072707	072719	072727	072733	072739	072763	072767	072797
072817	072823	072859	072869	072871	072883	072889	072893
072901	072907	072911	072923	072931	072937	072949	072953
072959	072973	072977	072997	073009	073013	073019	073037
073039	073043	073061	073063	073079	073091	073121	073127
073133	073141	073181	073189	073237	073243	073259	073277
073291	073303	073309	073327	073331	073351	073361	073363
073369	073379	073387	073417	073421	073433	073453	073459
073471	073477	073483	073517	073523	073529	073547	073553
073561	073571	073583	073589	073597	073607	073609	073613
073637	073643	073651	073673	073679	073681	073693	073699
073709	073721	073727	073751	073757	073771	073783	073819
073823	073847	073849	073859	073867	073877	073883	073897
073907	073939	073943	073951	073961	073973	073999	074017
074021	074027	074047	074051	074071	074077	074093	074099
074101	074131	074143	074149	074159	074161	074167	074177
074189	074197	074201	074203	074209	074219	074231	074257
074279	074287	074293	074297	074311	074317	074323	074353
074357	074363	074377	074381	074383	074411	074413	074419
074441	074449	074453	074471	074489	074507	074509	074521
074527	074531	074551	074561	074567	074573	074587	074597
074609	074611	074623	074653	074687	074699	074707	074713
074717	074719	074729	074731	074747	074759	074761	074771
074779	074797	074821	074827	074831	074843	074857	074861
074869	074873	074887	074891	074897	074903	074923	074929
074933	074941	074959	075011	075013	075017	075029	075037

075041	075079	075083	075109	075133	075149	075161	075167
075169	075181	075193	075209	075211	075217	075223	075227
075239	075253	075269	075277	075289	075307	075323	075329
075337	075347	075353	075367	075377	075389	075391	075401
075403	075407	075431	075437	075479	075503	075511	075521
075527	075533	075539	075541	075553	075557	075571	075577
075583	075611	075617	075619	075629	075641	075653	075659
075679	075683	075689	075703	075707	075709	075721	075731
075743	075767	075773	075781	075787	075793	075797	075821
075833	075853	075869	075883	075913	075931	075937	075941
075967	075979	075983	075989	075991	075997	076001	076003
076031	076039	076079	076081	076091	076099	076103	076123
076129	076147	076157	076159	076163	076207	076213	076231
076243	076249	076253	076259	076261	076283	076289	076303
076333	076343	076367	076369	076379	076387	076403	076421
076423	076441	076463	076471	076481	076487	076493	076507
076511	076519	076537	076541	076543	076561	076579	076597
076603	076607	076631	076649	076651	076667	076673	076679
076697	076717	076733	076753	076757	076771	076777	076781
076801	076819	076829	076831	076837	076847	076871	076873
076883	076907	076913	076919	076943	076949	076961	076963
076991	077003	077017	077023	077029	077041	077047	077069
077081	077093	077101	077137	077141	077153	077167	077171
077191	077201	077213	077237	077239	077243	077249	077261
077263	077267	077269	077279	077291	077317	077323	077339
077347	077351	077359	077369	077377	077383	077417	077419
077431	077447	077471	077477	077479	077489	077491	077509
077513	077521	077527	077543	077549	077551	077557	077563
077569	077573	077587	077591	077611	077617	077621	077641
077647	077659	077681	077687	077689	077699	077711	077713
077719	077723	077731	077743	077747	077761	077773	077783

077797	077801	077813	077839	077849	077863	077867	077893
077899	077929	077933	077951	077969	077977	077983	077999
078007	078017	078031	078041	078049	078059	078079	078101
078121	078137	078139	078157	078163	078167	078173	078179
078191	078193	078203	078229	078233	078241	078259	078277
078283	078301	078307	078311	078317	078341	078347	078367
078401	078427	078437	078439	078467	078479	078487	078497
078509	078511	078517	078539	078541	078553	078569	078571
078577	078583	078593	078607	078623	078643	078649	078653
078691	078697	078707	078713	078721	078737	078779	078781
078787	078791	078797	078803	078809	078823	078839	078853
078857	078877	078887	078889	078893	078901	078919	078929
078941	078977	078979	078989	079031	079039	079043	079063
079087	079103	079111	079133	079139	079147	079151	079153
079159	079181	079187	079193	079201	079229	079231	079241
079259	079273	079279	079283	079301	079309	079319	079333
079337	079349	079357	079367	079379	079393	079397	079399
079411	079423	079427	079433	079451	079481	079493	079531
079537	079549	079559	079561	079579	079589	079601	079609
079613	079621	079627	079631	079633	079657	079669	079687
079691	079693	079697	079699	079757	079769	079777	079801
079811	079813	079817	079823	079829	079841	079843	079847
079861	079867	079873	079889	079901	079903	079907	079939
079943	079967	079973	079979	079987	079997	079999	080021
080039	080051	080071	080077	080107	080111	080141	080147
080149	080153	080167	080173	080177	080191	080207	080209
080221	080231	080233	080239	080251	080263	080273	080279
080287	080309	080317	080329	080341	080347	080363	080369
080387	080407	080429	080447	080449	080471	080473	080489
080491	080513	080527	080537	080557	080567	080599	080603
080611	080621	080627	080629	080651	080657	080669	080671

080677	080681	080683	080687	080701	080713	080737	080747
080749	080761	080777	080779	080783	080789	080803	080809
080819	080831	080833	080849	080863	080897	080909	080911
080917	080923	080929	080933	080953	080963	080989	081001
081013	081017	081019	081023	081031	081041	081043	081047
081049	081071	081077	081083	081097	081101	081119	081131
081157	081163	081173	081181	081197	081199	081203	081223
081233	081239	081281	081283	081293	081299	081307	081331
081343	081349	081353	081359	081371	081373	081401	081409
081421	081439	081457	081463	081509	081517	081527	081533
081547	081551	081553	081559	081563	081569	081611	081619
081629	081637	081647	081649	081667	081671	081677	081689
081701	081703	081707	081727	081737	081749	081761	081769
081773	081799	081817	081839	081847	081853	081869	081883
081899	081901	081919	081929	081931	081937	081943	081953
081967	081971	081973	082003	082007	082009	082013	082021
082031	082037	082039	082051	082067	082073	082129	082139
082141	082153	082163	082171	082183	082189	082193	082207
082217	082219	082223	082231	082237	082241	082261	082267
082279	082301	082307	082339	082349	082351	082361	082373
082387	082393	082421	082457	082463	082469	082471	082483
082487	082493	082499	082507	082529	082531	082549	082559
082561	082567	082571	082591	082601	082609	082613	082619
082633	082651	082657	082699	082721	082723	082727	082729
082757	082759	082763	082781	082787	082793	082799	082811
082813	082837	082847	082883	082889	082891	082903	082913
082939	082963	082981	082997	083003	083009	083023	083047
083059	083063	083071	083077	083089	083093	083101	083117
083137	083177	083203	083207	083219	083221	083227	083231
083233	083243	083257	083267	083269	083273	083299	083311
083339	083341	083357	083383	083389	083399	083401	083407

083417	083423	083431	083437	083443	083449	083459	083471
083477	083497	083537	083557	083561	083563	083579	083591
083597	083609	083617	083621	083639	083641	083653	083663
083689	083701	083717	083719	083737	083761	083773	083777
083791	083813	083833	083843	083857	083869	083873	083891
083903	083911	083921	083933	083939	083969	083983	083987
084011	084017	084047	084053	084059	084061	084067	084089
084121	084127	084131	084137	084143	084163	084179	084181
084191	084199	084211	084221	084223	084229	084239	084247
084263	084299	084307	084313	084317	084319	084347	084349
084377	084389	084391	084401	084407	084421	084431	084437
084443	084449	084457	084463	084467	084481	084499	084503
084509	084521	084523	084533	084551	084559	084589	084629
084631	084649	084653	084659	084673	084691	084697	084701
084713	084719	084731	084737	084751	084761	084787	084793
084809	084811	084827	084857	084859	084869	084871	084913
084919	084947	084961	084967	084977	084979	084991	085009
085021	085027	085037	085049	085061	085081	085087	085091
085093	085103	085109	085121	085133	085147	085159	085193
085199	085201	085213	085223	085229	085237	085243	085247
085259	085297	085303	085313	085331	085333	085361	085363
085369	085381	085411	085427	085429	085439	085447	085451
085453	085469	085487	085513	085517	085523	085531	085549
085571	085577	085597	085601	085607	085619	085621	085627
085639	085643	085661	085667	085669	085691	085703	085711
085717	085733	085751	085781	085793	085817	085819	085829
085831	085837	085843	085847	085853	085889	085903	085909
085931	085933	085991	085999	086011	086017	086027	086029
086069	086077	086083	086111	086113	086117	086131	086137
086143	086161	086171	086179	086183	086197	086201	086209
086239	086243	086249	086257	086263	086269	086287	086291

086293	086297	086311	086323	086341	086351	086353	086357
086369	086371	086381	086389	086399	086413	086423	086441
086453	086461	086467	086477	086491	086501	086509	086531
086533	086539	086561	086573	086579	086587	086599	086627
086629	086677	086689	086693	086711	086719	086729	086743
086753	086767	086771	086783	086813	086837	086843	086851
086857	086861	086869	086923	086927	086929	086939	086951
086959	086969	086981	086993	087011	087013	087037	087041
087049	087071	087083	087103	087107	087119	087121	087133
087149	087151	087179	087181	087187	087211	087221	087223
087251	087253	087257	087277	087281	087293	087299	087313
087317	087323	087337	087359	087383	087403	087407	087421
087427	087433	087443	087473	087481	087491	087509	087511
087517	087523	087539	087541	087547	087553	087557	087559
087583	087587	087589	087613	087623	087629	087631	087641
087643	087649	087671	087679	087683	087691	087697	087701
087719	087721	087739	087743	087751	087767	087793	087797
087803	087811	087833	087853	087869	087877	087881	087887
087911	087917	087931	087943	087959	087961	087973	087977
087991	088001	088003	088007	088019	088037	088069	088079
088093	088117	088129	088169	088177	088211	088223	088237
088241	088259	088261	088289	088301	088321	088327	088337
088339	088379	088397	088411	088423	088427	088463	088469
088471	088493	088499	088513	088523	088547	088589	088591
088607	088609	088643	088651	088657	088661	088663	088667
088681	088721	088729	088741	088747	088771	088789	088793
088799	088801	088807	088811	088813	088817	088819	088843
088853	088861	088867	088873	088883	088897	088903	088919
088937	088951	088969	088993	088997	089003	089009	089017
089021	089041	089051	089057	089069	089071	089083	089087
089101	089107	089113	089119	089123	089137	089153	089189

089203	089209	089213	089227	089231	089237	089261	089269
089273	089293	089303	089317	089329	089363	089371	089381
089387	089393	089399	089413	089417	089431	089443	089449
089459	089477	089491	089501	089513	089519	089521	089527
089533	089561	089563	089567	089591	089597	089599	089603
089611	089627	089633	089653	089657	089659	089669	089671
089681	089689	089753	089759	089767	089779	089783	089797
089809	089819	089821	089833	089839	089849	089867	089891
089897	089899	089909	089917	089923	089939	089959	089963
089977	089983	089989	090001	090007	090011	090017	090019
090023	090031	090053	090059	090067	090071	090073	090089
090107	090121	090127	090149	090163	090173	090187	090191
090197	090199	090203	090217	090227	090239	090247	090263
090271	090281	090289	090313	090353	090359	090371	090373
090379	090397	090401	090403	090407	090437	090439	090469
090473	090481	090499	090511	090523	090527	090529	090533
090547	090583	090599	090617	090619	090631	090641	090647
090659	090677	090679	090697	090703	090709	090731	090749
090787	090793	090803	090821	090823	090833	090841	090847
090863	090887	090901	090907	090911	090917	090931	090947
090971	090977	090989	090997	091009	091019	091033	091079
091081	091097	091099	091121	091127	091129	091139	091141
091151	091153	091159	091163	091183	091193	091199	091229
091237	091243	091249	091253	091283	091291	091297	091303
091309	091331	091367	091369	091373	091381	091387	091393
091397	091411	091423	091433	091453	091457	091459	091463
091493	091499	091513	091529	091541	091571	091573	091577
091583	091591	091621	091631	091639	091673	091691	091703
091711	091733	091753	091757	091771	091781	091801	091807
091811	091813	091823	091837	091841	091867	091873	091909
091921	091939	091943	091951	091957	091961	091967	091969

091997	092003	092009	092033	092041	092051	092077	092083
092107	092111	092119	092143	092153	092173	092177	092179
092189	092203	092219	092221	092227	092233	092237	092243
092251	092269	092297	092311	092317	092333	092347	092353
092357	092363	092369	092377	092381	092383	092387	092399
092401	092413	092419	092431	092459	092461	092467	092479
092489	092503	092507	092551	092557	092567	092569	092581
092593	092623	092627	092639	092641	092647	092657	092669
092671	092681	092683	092693	092699	092707	092717	092723
092737	092753	092761	092767	092779	092789	092791	092801
092809	092821	092831	092849	092857	092861	092863	092867
092893	092899	092921	092927	092941	092951	092957	092959
092987	092993	093001	093047	093053	093059	093077	093083
093089	093097	093103	093113	093131	093133	093139	093151
093169	093179	093187	093199	093229	093239	093241	093251
093253	093257	093263	093281	093283	093287	093307	093319
093323	093329	093337	093371	093377	093383	093407	093419
093427	093463	093479	093481	093487	093491	093493	093497
093503	093523	093529	093553	093557	093559	093563	093581
093601	093607	093629	093637	093683	093701	093703	093719
093739	093761	093763	093787	093809	093811	093827	093851
093871	093887	093889	093893	093901	093911	093913	093923
093937	093941	093949	093967	093971	093979	093983	093997
094007	094009	094033	094049	094057	094063	094079	094099
094109	094111	094117	094121	094151	094153	094169	094201
094207	094219	094229	094253	094261	094273	094291	094307
094309	094321	094327	094331	094343	094349	094351	094379
094397	094399	094421	094427	094433	094439	094441	094447
094463	094477	094483	094513	094529	094531	094541	094543
094547	094559	094561	094573	094583	094597	094603	094613
094621	094649	094651	094687	094693	094709	094723	094727

094747	094771	094777	094781	094789	094793	094811	094819
094823	094837	094841	094847	094849	094873	094889	094903
094907	094933	094949	094951	094961	094993	094999	095003
095009	095021	095027	095063	095071	095083	095087	095089
095093	095101	095107	095111	095131	095143	095153	095177
095189	095191	095203	095213	095219	095231	095233	095239
095257	095261	095267	095273	095279	095287	095311	095317
095327	095339	095369	095383	095393	095401	095413	095419
095429	095441	095443	095461	095467	095471	095479	095483
095507	095527	095531	095539	095549	095561	095569	095581
095597	095603	095617	095621	095629	095633	095651	095701
095707	095713	095717	095723	095731	095737	095747	095773
095783	095789	095791	095801	095803	095813	095819	095857
095869	095873	095881	095891	095911	095917	095923	095929
095947	095957	095959	095971	095987	095989	096001	096013
096017	096043	096053	096059	096079	096097	096137	096149
096157	096167	096179	096181	096199	096211	096221	096223
096233	096259	096263	096269	096281	096289	096293	096323
096329	096331	096337	096353	096377	096401	096419	096431
096443	096451	096457	096461	096469	096479	096487	096493
096497	096517	096527	096553	096557	096581	096587	096589
096601	096643	096661	096667	096671	096697	096703	096731
096737	096739	096749	096757	096763	096769	096779	096787
096797	096799	096821	096823	096827	096847	096851	096857
096893	096907	096911	096931	096953	096959	096973	096979
096989	096997	097001	097003	097007	097021	097039	097073
097081	097103	097117	097127	097151	097157	097159	097169
097171	097177	097187	097213	097231	097241	097259	097283
097301	097303	097327	097367	097369	097373	097379	097381
097387	097397	097423	097429	097441	097453	097459	097463
097499	097501	097511	097523	097547	097549	097553	097561

097571	097577	097579	097583	097607	097609	097613	097649
097651	097673	097687	097711	097729	097771	097777	097787
097789	097813	097829	097841	097843	097847	097849	097859
097861	097871	097879	097883	097919	097927	097931	097943
097961	097967	097973	097987	098009	098011	098017	098041
098047	098057	098081	098101	098123	098129	098143	098179
098207	098213	098221	098227	098251	098257	098269	098297
098299	098317	098321	098323	098327	098347	098369	098377
098387	098389	098407	098411	098419	098429	098443	098453
098459	098467	098473	098479	098491	098507	098519	098533
098543	098561	098563	098573	098597	098621	098627	098639
098641	098663	098669	098689	098711	098713	098717	098729
098731	098737	098773	098779	098801	098807	098809	098837
098849	098867	098869	098873	098887	098893	098897	098899
098909	098911	098927	098929	098939	098947	098953	098963
098981	098993	098999	099013	099017	099023	099041	099053
099079	099083	099089	099103	099109	099119	099131	099133
099137	099139	099149	099173	099181	099191	099223	099233
099241	099251	099257	099259	099277	099289	099317	099347
099349	099367	099371	099377	099391	099397	099401	099409
099431	099439	099469	099487	099497	099523	099527	099529
099551	099559	099563	099571	099577	099581	099607	099611
099623	099643	099661	099667	099679	099689	099707	099709
099713	099719	099721	099733	099761	099767	099787	099793
099809	099817	099823	099829	099833	099839	099859	099871
099877	099881	099901	099907	099923	099929	099961	099971
099989	099991	100003	100019	100043	100049	100057	100069
100103	100109	100129	100151	100153	100169	100183	100189
100193	100207	100213	100237	100267	100271	100279	100291
100297	100313	100333	100343	100357	100361	100363	100379
100391	100393	100403	100411	100417	100447	100459	100469

100483	100493	100501	100511	100517	100519	100523	100537
100547	100549	100559	100591	100609	100613	100621	100649
100669	100673	100693	100699	100703	100733	100741	100747
100769	100787	100799	100801	100811	100823	100829	100847
100853	100907	100913	100927	100931	100937	100943	100957
100981	100987	100999	101009	101021	101027	101051	101063
101081	101089	101107	101111	101113	101117	101119	101141
101149	101159	101161	101173	101183	101197	101203	101207
101209	101221	101267	101273	101279	101281	101287	101293
101323	101333	101341	101347	101359	101363	101377	101383
101399	101411	101419	101429	101449	101467	101477	101483
101489	101501	101503	101513	101527	101531	101533	101537
101561	101573	101581	101599	101603	101611	101627	101641
101653	101663	101681	101693	101701	101719	101723	101737
101741	101747	101749	101771	101789	101797	101807	101833
101837	101839	101863	101869	101873	101879	101891	101917
101921	101929	101939	101957	101963	101977	101987	101999
102001	102013	102019	102023	102031	102043	102059	102061
102071	102077	102079	102101	102103	102107	102121	102139
102149	102161	102181	102191	102197	102199	102203	102217
102229	102233	102241	102251	102253	102259	102293	102299
102301	102317	102329	102337	102359	102367	102397	102407
102409	102433	102437	102451	102461	102481	102497	102499
102503	102523	102533	102539	102547	102551	102559	102563
102587	102593	102607	102611	102643	102647	102653	102667
102673	102677	102679	102701	102761	102763	102769	102793
102797	102811	102829	102841	102859	102871	102877	102881
102911	102913	102929	102931	102953	102967	102983	103001
103007	103043	103049	103067	103069	103079	103087	103091
103093	103099	103123	103141	103171	103177	103183	103217
103231	103237	103289	103291	103307	103319	103333	103349

103357	103387	103391	103393	103399	103409	103421	103423
103451	103457	103471	103483	103511	103529	103549	103553
103561	103567	103573	103577	103583	103591	103613	103619
103643	103651	103657	103669	103681	103687	103699	103703
103723	103769	103787	103801	103811	103813	103837	103841
103843	103867	103889	103903	103913	103919	103951	103963
103967	103969	103979	103981	103991	103993	103997	104003
104009	104021	104033	104047	104053	104059	104087	104089
104107	104113	104119	104123	104147	104149	104161	104173
104179	104183	104207	104231	104233	104239	104243	104281
104287	104297	104309	104311	104323	104327	104347	104369
104381	104383	104393	104399	104417	104459	104471	104473
104479	104491	104513	104527	104537	104543	104549	104551
104561	104579	104593	104597	104623	104639	104651	104659
104677	104681	104683	104693	104701	104707	104711	104717
104723	104729	104743	104759	104761	104773	104779	104789
104801	104803	104827	104831	104849	104851	104869	104879
104891	104911	104917	104933	104947	104953	104959	104971
104987	104999	105019	105023	105031	105037	105071	105097
105107	105137	105143	105167	105173	105199	105211	105227
105229	105239	105251	105253	105263	105269	105277	105319
105323	105331	105337	105341	105359	105361	105367	105373
105379	105389	105397	105401	105407	105437	105449	105467
105491	105499	105503	105509	105517	105527	105529	105533
105541	105557	105563	105601	105607	105613	105619	105649
105653	105667	105673	105683	105691	105701	105727	105733
105751	105761	105767	105769	105817	105829	105863	105871
105883	105899	105907	105913	105929	105943	105953	105967
105971	105977	105983	105997	106013	106019	106031	106033
106087	106103	106109	106121	106123	106129	106163	106181
106187	106189	106207	106213	106217	106219	106243	106261

106273	106277	106279	106291	106297	106303	106307	106319
106321	106331	106349	106357	106363	106367	106373	106391
106397	106411	106417	106427	106433	106441	106451	106453
106487	106501	106531	106537	106541	106543	106591	106619
106621	106627	106637	106649	106657	106661	106663	106669
106681	106693	106699	106703	106721	106727	106739	106747
106751	106753	106759	106781	106783	106787	106801	106823
106853	106859	106861	106867	106871	106877	106903	106907
106921	106937	106949	106957	106961	106963	106979	106993
107021	107033	107053	107057	107069	107071	107077	107089
107099	107101	107119	107123	107137	107171	107183	107197
107201	107209	107227	107243	107251	107269	107273	107279
107309	107323	107339	107347	107351	107357	107377	107441
107449	107453	107467	107473	107507	107509	107563	107581
107599	107603	107609	107621	107641	107647	107671	107687
107693	107699	107713	107717	107719	107741	107747	107761
107773	107777	107791	107827	107837	107839	107843	107857
107867	107873	107881	107897	107903	107923	107927	107941
107951	107971	107981	107999	108007	108011	108013	108023
108037	108041	108061	108079	108089	108107	108109	108127
108131	108139	108161	108179	108187	108191	108193	108203
108211	108217	108223	108233	108247	108263	108271	108287
108289	108293	108301	108343	108347	108359	108377	108379
108401	108413	108421	108439	108457	108461	108463	108497
108499	108503	108517	108529	108533	108541	108553	108557
108571	108587	108631	108637	108643	108649	108677	108707
108709	108727	108739	108751	108761	108769	108791	108793
108799	108803	108821	108827	108863	108869	108877	108881
108883	108887	108893	108907	108917	108923	108929	108943
108947	108949	108959	108961	108967	108971	108991	109001
109013	109037	109049	109063	109073	109097	109103	109111

109121	109133	109139	109141	109147	109159	109169	109171
109199	109201	109211	109229	109253	109267	109279	109297
109303	109313	109321	109331	109357	109363	109367	109379
109387	109391	109397	109423	109433	109441	109451	109453
109469	109471	109481	109507	109517	109519	109537	109541
109547	109567	109579	109583	109589	109597	109609	109619
109621	109639	109661	109663	109673	109717	109721	109741
109751	109789	109793	109807	109819	109829	109831	109841
109843	109847	109849	109859	109873	109883	109891	109897
109903	109913	109919	109937	109943	109961	109987	110017
110023	110039	110051	110059	110063	110069	110083	110119
110129	110161	110183	110221	110233	110237	110251	110261
110269	110273	110281	110291	110311	110321	110323	110339
110359	110419	110431	110437	110441	110459	110477	110479
110491	110501	110503	110527	110533	110543	110557	110563
110567	110569	110573	110581	110587	110597	110603	110609
110623	110629	110641	110647	110651	110681	110711	110729
110731	110749	110753	110771	110777	110807	110813	110819
110821	110849	110863	110879	110881	110899	110909	110917
110921	110923	110927	110933	110939	110947	110951	110969
110977	110989	111029	111031	111043	111049	111053	111091
111103	111109	111119	111121	111127	111143	111149	111187
111191	111211	111217	111227	111229	111253	111263	111269
111271	111301	111317	111323	111337	111341	111347	111373
111409	111427	111431	111439	111443	111467	111487	111491
111493	111497	111509	111521	111533	111539	111577	111581
111593	111599	111611	111623	111637	111641	111653	111659
111667	111697	111721	111731	111733	111751	111767	111773
111779	111781	111791	111799	111821	111827	111829	111833
111847	111857	111863	111869	111871	111893	111913	111919
111949	111953	111959	111973	111977	111997	112019	112031

112061	112067	112069	112087	112097	112103	112111	112121
112129	112139	112153	112163	112181	112199	112207	112213
112223	112237	112241	112247	112249	112253	112261	112279
112289	112291	112297	112303	112327	112331	112337	112339
112349	112361	112363	112397	112403	112429	112459	112481
112501	112507	112543	112559	112571	112573	112577	112583
112589	112601	112603	112621	112643	112657	112663	112687
112691	112741	112757	112759	112771	112787	112799	112807
112831	112843	112859	112877	112901	112909	112913	112919
112921	112927	112939	112951	112967	112979	112997	113011
113017	113021	113023	113027	113039	113041	113051	113063
113081	113083	113089	113093	113111	113117	113123	113131
113143	113147	113149	113153	113159	113161	113167	113171
113173	113177	113189	113209	113213	113227	113233	113279
113287	113327	113329	113341	113357	113359	113363	113371
113381	113383	113417	113437	113453	113467	113489	113497
113501	113513	113537	113539	113557	113567	113591	113621
113623	113647	113657	113683	113717	113719	113723	113731
113749	113759	113761	113777	113779	113783	113797	113809
113819	113837	113843	113891	113899	113903	113909	113921
113933	113947	113957	113963	113969	113983	113989	114001
114013	114031	114041	114043	114067	114073	114077	114083
114089	114113	114143	114157	114161	114167	114193	114197
114199	114203	114217	114221	114229	114259	114269	114277
114281	114299	114311	114319	114329	114343	114371	114377
114407	114419	114451	114467	114473	114479	114487	114493
114547	114553	114571	114577	114593	114599	114601	114613
114617	114641	114643	114649	114659	114661	114671	114679
114689	114691	114713	114743	114749	114757	114761	114769
114773	114781	114797	114799	114809	114827	114833	114847
114859	114883	114889	114901	114913	114941	114967	114973

114997	115001	115013	115019	115021	115057	115061	115067
115079	115099	115117	115123	115127	115133	115151	115153
115163	115183	115201	115211	115223	115237	115249	115259
115279	115301	115303	115309	115319	115321	115327	115331
115337	115343	115361	115363	115399	115421	115429	115459
115469	115471	115499	115513	115523	115547	115553	115561
115571	115589	115597	115601	115603	115613	115631	115637
115657	115663	115679	115693	115727	115733	115741	115751
115757	115763	115769	115771	115777	115781	115783	115793
115807	115811	115823	115831	115837	115849	115853	115859
115861	115873	115877	115879	115883	115891	115901	115903
115931	115933	115963	115979	115981	115987	116009	116027
116041	116047	116089	116099	116101	116107	116113	116131
116141	116159	116167	116177	116189	116191	116201	116239
116243	116257	116269	116273	116279	116293	116329	116341
116351	116359	116371	116381	116387	116411	116423	116437
116443	116447	116461	116471	116483	116491	116507	116531
116533	116537	116539	116549	116579	116593	116639	116657
116663	116681	116687	116689	116707	116719	116731	116741
116747	116789	116791	116797	116803	116819	116827	116833
116849	116867	116881	116903	116911	116923	116927	116929
116933	116953	116959	116969	116981	116989	116993	117017
117023	117037	117041	117043	117053	117071	117101	117109
117119	117127	117133	117163	117167	117191	117193	117203
117209	117223	117239	117241	117251	117259	117269	117281
117307	117319	117329	117331	117353	117361	117371	117373
117389	117413	117427	117431	117437	117443	117497	117499
117503	117511	117517	117529	117539	117541	117563	117571
117577	117617	117619	117643	117659	117671	117673	117679
117701	117703	117709	117721	117727	117731	117751	117757
117763	117773	117779	117787	117797	117809	117811	117833

117839	117841	117851	117877	117881	117883	117889	117899
117911	117917	117937	117959	117973	117977	117979	117989
117991	118033	118037	118043	118051	118057	118061	118081
118093	118127	118147	118163	118169	118171	118189	118211
118213	118219	118247	118249	118253	118259	118273	118277
118297	118343	118361	118369	118373	118387	118399	118409
118411	118423	118429	118453	118457	118463	118471	118493
118529	118543	118549	118571	118583	118589	118603	118619
118621	118633	118661	118669	118673	118681	118687	118691
118709	118717	118739	118747	118751	118757	118787	118799
118801	118819	118831	118843	118861	118873	118891	118897
118901	118903	118907	118913	118927	118931	118967	118973
119027	119033	119039	119047	119057	119069	119083	119087
119089	119099	119101	119107	119129	119131	119159	119173
119179	119183	119191	119227	119233	119237	119243	119267
119291	119293	119297	119299	119311	119321	119359	119363
119389	119417	119419	119429	119447	119489	119503	119513
119533	119549	119551	119557	119563	119569	119591	119611
119617	119627	119633	119653	119657	119659	119671	119677
119687	119689	119699	119701	119723	119737	119747	119759
119771	119773	119783	119797	119809	119813	119827	119831
119839	119849	119851	119869	119881	119891	119921	119923
119929	119953	119963	119971	119981	119983	119993	120011
120017	120041	120047	120049	120067	120077	120079	120091
120097	120103	120121	120157	120163	120167	120181	120193
120199	120209	120223	120233	120247	120277	120283	120293
120299	120319	120331	120349	120371	120383	120391	120397
120401	120413	120427	120431	120473	120503	120511	120539
120551	120557	120563	120569	120577	120587	120607	120619
120623	120641	120647	120661	120671	120677	120689	120691
120709	120713	120721	120737	120739	120749	120763	120767

120779	120811	120817	120823	120829	120833	120847	120851
120863	120871	120877	120889	120899	120907	120917	120919
120929	120937	120941	120943	120947	120977	120997	121001
121007	121013	121019	121021	121039	121061	121063	121067
121081	121123	121139	121151	121157	121169	121171	121181
121189	121229	121259	121267	121271	121283	121291	121309
121313	121321	121327	121333	121343	121349	121351	121357
121367	121369	121379	121403	121421	121439	121441	121447
121453	121469	121487	121493	121501	121507	121523	121531
121547	121553	121559	121571	121577	121579	121591	121607
121609	121621	121631	121633	121637	121661	121687	121697
121711	121721	121727	121763	121787	121789	121843	121853
121867	121883	121889	121909	121921	121931	121937	121949
121951	121963	121967	121993	121997	122011	122021	122027
122029	122033	122039	122041	122051	122053	122069	122081
122099	122117	122131	122147	122149	122167	122173	122201
122203	122207	122209	122219	122231	122251	122263	122267
122273	122279	122299	122321	122323	122327	122347	122363
122387	122389	122393	122399	122401	122443	122449	122453
122471	122477	122489	122497	122501	122503	122509	122527
122533	122557	122561	122579	122597	122599	122609	122611
122651	122653	122663	122693	122701	122719	122741	122743
122753	122761	122777	122789	122819	122827	122833	122839
122849	122861	122867	122869	122887	122891	122921	122929
122939	122953	122957	122963	122971	123001	123007	123017
123031	123049	123059	123077	123083	123091	123113	123121
123127	123143	123169	123191	123203	123209	123217	123229
123239	123259	123269	123289	123307	123311	123323	123341
123373	123377	123379	123397	123401	123407	123419	123427
123433	123439	123449	123457	123479	123491	123493	123499
123503	123517	123527	123547	123551	123553	123581	123583

123593	123601	123619	123631	123637	123653	123661	123667
123677	123701	123707	123719	123727	123731	123733	123737
123757	123787	123791	123803	123817	123821	123829	123833
123853	123863	123887	123911	123923	123931	123941	123953
123973	123979	123983	123989	123997	124001	124021	124067
124087	124097	124121	124123	124133	124139	124147	124153
124171	124181	124183	124193	124199	124213	124231	124247
124249	124277	124291	124297	124301	124303	124309	124337
124339	124343	124349	124351	124363	124367	124427	124429
124433	124447	124459	124471	124477	124489	124493	124513
124529	124541	124543	124561	124567	124577	124601	124633
124643	124669	124673	124679	124693	124699	124703	124717
124721	124739	124753	124759	124769	124771	124777	124781
124783	124793	124799	124819	124823	124847	124853	124897
124907	124909	124919	124951	124979	124981	124987	124991
125003	125017	125029	125053	125063	125093	125101	125107
125113	125117	125119	125131	125141	125149	125183	125197
125201	125207	125219	125221	125231	125243	125261	125269
125287	125299	125303	125311	125329	125339	125353	125371
125383	125387	125399	125407	125423	125429	125441	125453
125471	125497	125507	125509	125527	125539	125551	125591
125597	125617	125621	125627	125639	125641	125651	125659
125669	125683	125687	125693	125707	125711	125717	125731
125737	125743	125753	125777	125789	125791	125803	125813
125821	125863	125887	125897	125899	125921	125927	125929
125933	125941	125959	125963	126001	126011	126013	126019
126023	126031	126037	126041	126047	126067	126079	126097
126107	126127	126131	126143	126151	126173	126199	126211
126223	126227	126229	126233	126241	126257	126271	126307
126311	126317	126323	126337	126341	126349	126359	126397
126421	126433	126443	126457	126461	126473	126481	126487

126491	126493	126499	126517	126541	126547	126551	126583
126601	126611	126613	126631	126641	126653	126683	126691
126703	126713	126719	126733	126739	126743	126751	126757
126761	126781	126823	126827	126839	126851	126857	126859
126913	126923	126943	126949	126961	126967	126989	127031
127033	127037	127051	127079	127081	127103	127123	127133
127139	127157	127163	127189	127207	127217	127219	127241
127247	127249	127261	127271	127277	127289	127291	127297
127301	127321	127331	127343	127363	127373	127399	127403
127423	127447	127453	127481	127487	127493	127507	127529
127541	127549	127579	127583	127591	127597	127601	127607
127609	127637	127643	127649	127657	127663	127669	127679
127681	127691	127703	127709	127711	127717	127727	127733
127739	127747	127763	127781	127807	127817	127819	127837
127843	127849	127859	127867	127873	127877	127913	127921
127931	127951	127973	127979	127997	128021	128033	128047
128053	128099	128111	128113	128119	128147	128153	128159
128173	128189	128201	128203	128213	128221	128237	128239
128257	128273	128287	128291	128311	128321	128327	128339
128341	128347	128351	128377	128389	128393	128399	128411
128413	128431	128437	128449	128461	128467	128473	128477
128483	128489	128509	128519	128521	128549	128551	128563
128591	128599	128603	128621	128629	128657	128659	128663
128669	128677	128683	128693	128717	128747	128749	128761
128767	128813	128819	128831	128833	128837	128857	128861
128873	128879	128903	128923	128939	128941	128951	128959
128969	128971	128981	128983	128987	128993	129001	129011
129023	129037	129049	129061	129083	129089	129097	129113
129119	129121	129127	129169	129187	129193	129197	129209
129221	129223	129229	129263	129277	129281	129287	129289
129293	129313	129341	129347	129361	129379	129401	129403

129419	129439	129443	129449	129457	129461	129469	129491
129497	129499	129509	129517	129527	129529	129533	129539
129553	129581	129587	129589	129593	129607	129629	129631
129641	129643	129671	129707	129719	129733	129737	129749
129757	129763	129769	129793	129803	129841	129853	129887
129893	129901	129917	129919	129937	129953	129959	129967
129971	130003	130021	130027	130043	130051	130057	130069
130073	130079	130087	130099	130121	130127	130147	130171
130183	130199	130201	130211	130223	130241	130253	130259
130261	130267	130279	130303	130307	130337	130343	130349
130363	130367	130369	130379	130399	130409	130411	130423
130439	130447	130457	130469	130477	130483	130489	130513
130517	130523	130531	130547	130553	130579	130589	130619
130621	130631	130633	130639	130643	130649	130651	130657
130681	130687	130693	130699	130729	130769	130783	130787
130807	130811	130817	130829	130841	130843	130859	130873
130927	130957	130969	130973	130981	130987	131009	131011
131023	131041	131059	131063	131071	131101	131111	131113
131129	131143	131149	131171	131203	131213	131221	131231
131249	131251	131267	131293	131297	131303	131311	131317
131321	131357	131363	131371	131381	131413	131431	131437
131441	131447	131449	131477	131479	131489	131497	131501
131507	131519	131543	131561	131581	131591	131611	131617
131627	131639	131641	131671	131687	131701	131707	131711
131713	131731	131743	131749	131759	131771	131777	131779
131783	131797	131837	131839	131849	131861	131891	131893
131899	131909	131927	131933	131939	131941	131947	131959
131969	132001	132019	132047	132049	132059	132071	132103
132109	132113	132137	132151	132157	132169	132173	132199
132229	132233	132241	132247	132257	132263	132283	132287
132299	132313	132329	132331	132347	132361	132367	132371

132383	132403	132409	132421	132437	132439	132469	132491
132499	132511	132523	132527	132529	132533	132541	132547
132589	132607	132611	132619	132623	132631	132637	132647
132661	132667	132679	132689	132697	132701	132707	132709
132721	132739	132749	132751	132757	132761	132763	132817
132833	132851	132857	132859	132863	132887	132893	132911
132929	132947	132949	132953	132961	132967	132971	132989
133013	133033	133039	133051	133069	133073	133087	133097
133103	133109	133117	133121	133153	133157	133169	133183
133187	133201	133213	133241	133253	133261	133271	133277
133279	133283	133303	133319	133321	133327	133337	133349
133351	133379	133387	133391	133403	133417	133439	133447
133451	133481	133493	133499	133519	133541	133543	133559
133571	133583	133597	133631	133633	133649	133657	133669
133673	133691	133697	133709	133711	133717	133723	133733
133769	133781	133801	133811	133813	133831	133843	133853
133873	133877	133919	133949	133963	133967	133979	133981
133993	133999	134033	134039	134047	134053	134059	134077
134081	134087	134089	134093	134129	134153	134161	134171
134177	134191	134207	134213	134219	134227	134243	134257
134263	134269	134287	134291	134293	134327	134333	134339
134341	134353	134359	134363	134369	134371	134399	134401
134417	134437	134443	134471	134489	134503	134507	134513
134581	134587	134591	134593	134597	134609	134639	134669
134677	134681	134683	134699	134707	134731	134741	134753
134777	134789	134807	134837	134839	134851	134857	134867
134873	134887	134909	134917	134921	134923	134947	134951
134989	134999	135007	135017	135019	135029	135043	135049
135059	135077	135089	135101	135119	135131	135151	135173
135181	135193	135197	135209	135211	135221	135241	135257
135271	135277	135281	135283	135301	135319	135329	135347

135349	135353	135367	135389	135391	135403	135409	135427
135431	135433	135449	135461	135463	135467	135469	135479
135497	135511	135533	135559	135571	135581	135589	135593
135599	135601	135607	135613	135617	135623	135637	135647
135649	135661	135671	135697	135701	135719	135721	135727
135731	135743	135757	135781	135787	135799	135829	135841
135851	135859	135887	135893	135899	135911	135913	135929
135937	135977	135979	136013	136027	136033	136043	136057
136067	136069	136093	136099	136111	136133	136139	136163
136177	136189	136193	136207	136217	136223	136237	136247
136261	136273	136277	136303	136309	136319	136327	136333
136337	136343	136351	136361	136373	136379	136393	136397
136399	136403	136417	136421	136429	136447	136453	136463
136471	136481	136483	136501	136511	136519	136523	136531
136537	136541	136547	136559	136573	136601	136603	136607
136621	136649	136651	136657	136691	136693	136709	136711
136727	136733	136739	136751	136753	136769	136777	136811
136813	136841	136849	136859	136861	136879	136883	136889
136897	136943	136949	136951	136963	136973	136979	136987
136991	136993	136999	137029	137077	137087	137089	137117
137119	137131	137143	137147	137153	137177	137183	137191
137197	137201	137209	137219	137239	137251	137273	137279
137303	137321	137339	137341	137353	137359	137363	137369
137383	137387	137393	137399	137413	137437	137443	137447
137453	137477	137483	137491	137507	137519	137537	137567
137573	137587	137593	137597	137623	137633	137639	137653
137659	137699	137707	137713	137723	137737	137743	137771
137777	137791	137803	137827	137831	137849	137867	137869
137873	137909	137911	137927	137933	137941	137947	137957
137983	137993	137999	138007	138041	138053	138059	138071
138077	138079	138101	138107	138113	138139	138143	138157

138163	138179	138181	138191	138197	138209	138239	138241
138247	138251	138283	138289	138311	138319	138323	138337
138349	138371	138373	138389	138401	138403	138407	138427
138433	138449	138451	138461	138469	138493	138497	138511
138517	138547	138559	138563	138569	138571	138577	138581
138587	138599	138617	138629	138637	138641	138647	138661
138679	138683	138727	138731	138739	138763	138793	138797
138799	138821	138829	138841	138863	138869	138883	138889
138893	138899	138917	138923	138937	138959	138967	138977
139021	139033	139067	139079	139091	139109	139121	139123
139133	139169	139177	139187	139199	139201	139241	139267
139273	139291	139297	139301	139303	139309	139313	139333
139339	139343	139361	139367	139369	139387	139393	139397
139409	139423	139429	139439	139457	139459	139483	139487
139493	139501	139511	139537	139547	139571	139589	139591
139597	139609	139619	139627	139661	139663	139681	139697
139703	139709	139721	139729	139739	139747	139753	139759
139787	139801	139813	139831	139837	139861	139871	139883
139891	139901	139907	139921	139939	139943	139967	139969
139981	139987	139991	139999	140009	140053	140057	140069
140071	140111	140123	140143	140159	140167	140171	140177
140191	140197	140207	140221	140227	140237	140249	140263
140269	140281	140297	140317	140321	140333	140339	140351
140363	140381	140401	140407	140411	140417	140419	140423
140443	140449	140453	140473	140477	140521	140527	140533
140549	140551	140557	140587	140593	140603	140611	140617
140627	140629	140639	140659	140663	140677	140681	140683
140689	140717	140729	140731	140741	140759	140761	140773
140779	140797	140813	140827	140831	140837	140839	140863
140867	140869	140891	140893	140897	140909	140929	140939
140977	140983	140989	141023	141041	141061	141067	141073

141079	141101	141107	141121	141131	141157	141161	141179
141181	141199	141209	141221	141223	141233	141241	141257
141263	141269	141277	141283	141301	141307	141311	141319
141353	141359	141371	141397	141403	141413	141439	141443
141461	141481	141497	141499	141509	141511	141529	141539
141551	141587	141601	141613	141619	141623	141629	141637
141649	141653	141667	141671	141677	141679	141689	141697
141707	141709	141719	141731	141761	141767	141769	141773
141793	141803	141811	141829	141833	141851	141853	141863
141871	141907	141917	141931	141937	141941	141959	141961
141971	141991	142007	142019	142031	142039	142049	142057
142061	142067	142097	142099	142111	142123	142151	142157
142159	142169	142183	142189	142193	142211	142217	142223
142231	142237	142271	142297	142319	142327	142357	142369
142381	142391	142403	142421	142427	142433	142453	142469
142501	142529	142537	142543	142547	142553	142559	142567
142573	142589	142591	142601	142607	142609	142619	142657
142673	142697	142699	142711	142733	142757	142759	142771
142787	142789	142799	142811	142837	142841	142867	142871
142873	142897	142903	142907	142939	142949	142963	142969
142973	142979	142981	142993	143053	143063	143093	143107
143111	143113	143137	143141	143159	143177	143197	143239
143243	143249	143257	143261	143263	143281	143287	143291
143329	143333	143357	143387	143401	143413	143419	143443
143461	143467	143477	143483	143489	143501	143503	143509
143513	143519	143527	143537	143551	143567	143569	143573
143593	143609	143617	143629	143651	143653	143669	143677
143687	143699	143711	143719	143729	143743	143779	143791
143797	143807	143813	143821	143827	143831	143833	143873
143879	143881	143909	143947	143953	143971	143977	143981
143999	144013	144031	144037	144061	144071	144073	144103

144139	144161	144163	144167	144169	144173	144203	144223
144241	144247	144253	144259	144271	144289	144299	144307
144311	144323	144341	144349	144379	144383	144407	144409
144413	144427	144439	144451	144461	144479	144481	144497
144511	144539	144541	144563	144569	144577	144583	144589
144593	144611	144629	144659	144667	144671	144701	144709
144719	144731	144737	144751	144757	144763	144773	144779
144791	144817	144829	144839	144847	144883	144887	144889
144899	144917	144931	144941	144961	144967	144973	144983
145007	145009	145021	145031	145037	145043	145063	145069
145091	145109	145121	145133	145139	145177	145193	145207
145213	145219	145253	145259	145267	145283	145289	145303
145307	145349	145361	145381	145391	145399	145417	145423
145433	145441	145451	145459	145463	145471	145477	145487
145501	145511	145513	145517	145531	145543	145547	145549
145577	145589	145601	145603	145633	145637	145643	145661
145679	145681	145687	145703	145709	145721	145723	145753
145757	145759	145771	145777	145799	145807	145819	145823
145829	145861	145879	145897	145903	145931	145933	145949
145963	145967	145969	145987	145991	146009	146011	146021
146023	146033	146051	146057	146059	146063	146077	146093
146099	146117	146141	146161	146173	146191	146197	146203
146213	146221	146239	146249	146273	146291	146297	146299
146309	146317	146323	146347	146359	146369	146381	146383
146389	146407	146417	146423	146437	146449	146477	146513
146519	146521	146527	146539	146543	146563	146581	146603
146609	146617	146639	146647	146669	146677	146681	146683
146701	146719	146743	146749	146767	146777	146801	146807
146819	146833	146837	146843	146849	146857	146891	146893
146917	146921	146933	146941	146953	146977	146983	146987
146989	147011	147029	147031	147047	147073	147083	147089

147097	147107	147137	147139	147151	147163	147179	147197
147209	147211	147221	147227	147229	147253	147263	147283
147289	147293	147299	147311	147319	147331	147341	147347
147353	147377	147391	147397	147401	147409	147419	147449
147451	147457	147481	147487	147503	147517	147541	147547
147551	147557	147571	147583	147607	147613	147617	147629
147647	147661	147671	147673	147689	147703	147709	147727
147739	147743	147761	147769	147773	147779	147787	147793
147799	147811	147827	147853	147859	147863	147881	147919
147937	147949	147977	147997	148013	148021	148061	148063
148073	148079	148091	148123	148139	148147	148151	148153
148157	148171	148193	148199	148201	148207	148229	148243
148249	148279	148301	148303	148331	148339	148361	148367
148381	148387	148399	148403	148411	148429	148439	148457
148469	148471	148483	148501	148513	148517	148531	148537
148549	148573	148579	148609	148627	148633	148639	148663
148667	148669	148691	148693	148711	148721	148723	148727
148747	148763	148781	148783	148793	148817	148829	148853
148859	148861	148867	148873	148891	148913	148921	148927
148931	148933	148949	148957	148961	148991	148997	149011
149021	149027	149033	149053	149057	149059	149069	149077
149087	149099	149101	149111	149113	149119	149143	149153
149159	149161	149173	149183	149197	149213	149239	149249
149251	149257	149269	149287	149297	149309	149323	149333
149341	149351	149371	149377	149381	149393	149399	149411
149417	149419	149423	149441	149459	149489	149491	149497
149503	149519	149521	149531	149533	149543	149551	149561
149563	149579	149603	149623	149627	149629	149689	149711
149713	149717	149729	149731	149749	149759	149767	149771
149791	149803	149827	149837	149839	149861	149867	149873
149893	149899	149909	149911	149921	149939	149953	149969

149971	149993	150001	150011	150041	150053	150061	150067
150077	150083	150089	150091	150097	150107	150131	150151
150169	150193	150197	150203	150209	150211	150217	150221
150223	150239	150247	150287	150299	150301	150323	150329
150343	150373	150377	150379	150383	150401	150407	150413
150427	150431	150439	150473	150497	150503	150517	150523
150533	150551	150559	150571	150583	150587	150589	150607
150611	150617	150649	150659	150697	150707	150721	150743
150767	150769	150779	150791	150797	150827	150833	150847
150869	150881	150883	150889	150893	150901	150907	150919
150929	150959	150961	150967	150979	150989	150991	151007
151009	151013	151027	151049	151051	151057	151091	151121
151141	151153	151157	151163	151169	151171	151189	151201
151213	151237	151241	151243	151247	151253	151273	151279
151289	151303	151337	151339	151343	151357	151379	151381
151391	151397	151423	151429	151433	151451	151471	151477
151483	151499	151507	151517	151523	151531	151537	151549
151553	151561	151573	151579	151597	151603	151607	151609
151631	151637	151643	151651	151667	151673	151681	151687
151693	151703	151717	151729	151733	151769	151771	151783
151787	151799	151813	151817	151841	151847	151849	151871
151883	151897	151901	151903	151909	151937	151939	151967
151969	152003	152017	152027	152029	152039	152041	152063
152077	152081	152083	152093	152111	152123	152147	152183
152189	152197	152203	152213	152219	152231	152239	152249
152267	152287	152293	152297	152311	152363	152377	152381
152389	152393	152407	152417	152419	152423	152429	152441
152443	152459	152461	152501	152519	152531	152533	152539
152563	152567	152597	152599	152617	152623	152629	152639
152641	152657	152671	152681	152717	152723	152729	152753
152767	152777	152783	152791	152809	152819	152821	152833

152837	152839	152843	152851	152857	152879	152897	152899
152909	152939	152941	152947	152953	152959	152981	152989
152993	153001	153059	153067	153071	153073	153077	153089
153107	153113	153133	153137	153151	153191	153247	153259
153269	153271	153277	153281	153287	153313	153319	153337
153343	153353	153359	153371	153379	153407	153409	153421
153427	153437	153443	153449	153457	153469	153487	153499
153509	153511	153521	153523	153529	153533	153557	153563
153589	153607	153611	153623	153641	153649	153689	153701
153719	153733	153739	153743	153749	153757	153763	153817
153841	153871	153877	153887	153889	153911	153913	153929
153941	153947	153949	153953	153991	153997	154001	154027
154043	154057	154061	154067	154073	154079	154081	154087
154097	154111	154127	154153	154157	154159	154181	154183
154211	154213	154229	154243	154247	154267	154277	154279
154291	154303	154313	154321	154333	154339	154351	154369
154373	154387	154409	154417	154423	154439	154459	154487
154493	154501	154523	154543	154571	154573	154579	154589
154591	154613	154619	154621	154643	154667	154669	154681
154691	154699	154723	154727	154733	154747	154753	154769
154787	154789	154799	154807	154823	154841	154849	154871
154873	154877	154883	154897	154927	154933	154937	154943
154981	154991	155003	155009	155017	155027	155047	155069
155081	155083	155087	155119	155137	155153	155161	155167
155171	155191	155201	155203	155209	155219	155231	155251
155269	155291	155299	155303	155317	155327	155333	155371
155377	155381	155383	155387	155399	155413	155423	155443
155453	155461	155473	155501	155509	155521	155537	155539
155557	155569	155579	155581	155593	155599	155609	155621
155627	155653	155657	155663	155671	155689	155693	155699
155707	155717	155719	155723	155731	155741	155747	155773

155777	155783	155797	155801	155809	155821	155833	155849
155851	155861	155863	155887	155891	155893	155921	156007
156011	156019	156041	156059	156061	156071	156089	156109
156119	156127	156131	156139	156151	156157	156217	156227
156229	156241	156253	156257	156259	156269	156307	156319
156329	156347	156353	156361	156371	156419	156421	156437
156467	156487	156491	156493	156511	156521	156539	156577
156589	156593	156601	156619	156623	156631	156641	156659
156671	156677	156679	156683	156691	156703	156707	156719
156727	156733	156749	156781	156797	156799	156817	156823
156833	156841	156887	156899	156901	156913	156941	156943
156967	156971	156979	157007	157013	157019	157037	157049
157051	157057	157061	157081	157103	157109	157127	157133
157141	157163	157177	157181	157189	157207	157211	157217
157219	157229	157231	157243	157247	157253	157259	157271
157273	157277	157279	157291	157303	157307	157321	157327
157349	157351	157363	157393	157411	157427	157429	157433
157457	157477	157483	157489	157513	157519	157523	157543
157559	157561	157571	157579	157627	157637	157639	157649
157667	157669	157679	157721	157733	157739	157747	157769
157771	157793	157799	157813	157823	157831	157837	157841
157867	157877	157889	157897	157901	157907	157931	157933
157951	157991	157999	158003	158009	158017	158029	158047
158071	158077	158113	158129	158141	158143	158161	158189
158201	158209	158227	158231	158233	158243	158261	158269
158293	158303	158329	158341	158351	158357	158359	158363
158371	158393	158407	158419	158429	158443	158449	158489
158507	158519	158527	158537	158551	158563	158567	158573
158581	158591	158597	158611	158617	158621	158633	158647
158657	158663	158699	158731	158747	158749	158759	158761
158771	158777	158791	158803	158843	158849	158863	158867

158881	158909	158923	158927	158941	158959	158981	158993
159013	159017	159023	159059	159073	159079	159097	159113
159119	159157	159161	159167	159169	159179	159191	159193
159199	159209	159223	159227	159233	159287	159293	159311
159319	159337	159347	159349	159361	159389	159403	159407
159421	159431	159437	159457	159463	159469	159473	159491
159499	159503	159521	159539	159541	159553	159563	159569
159571	159589	159617	159623	159629	159631	159667	159671
159673	159683	159697	159701	159707	159721	159737	159739
159763	159769	159773	159779	159787	159791	159793	159799
159811	159833	159839	159853	159857	159869	159871	159899
159911	159931	159937	159977	159979	160001	160009	160019
160031	160033	160049	160073	160079	160081	160087	160091
160093	160117	160141	160159	160163	160169	160183	160201
160207	160217	160231	160243	160253	160309	160313	160319
160343	160357	160367	160373	160387	160397	160403	160409
160423	160441	160453	160481	160483	160499	160507	160541
160553	160579	160583	160591	160603	160619	160621	160627
160637	160639	160649	160651	160663	160669	160681	160687
160697	160709	160711	160723	160739	160751	160753	160757
160781	160789	160807	160813	160817	160829	160841	160861
160877	160879	160883	160903	160907	160933	160967	160969
160981	160997	161009	161017	161033	161039	161047	161053
161059	161071	161087	161093	161123	161137	161141	161149
161159	161167	161201	161221	161233	161237	161263	161267
161281	161303	161309	161323	161333	161339	161341	161363
161377	161387	161407	161411	161453	161459	161461	161471
161503	161507	161521	161527	161531	161543	161561	161563
161569	161573	161591	161599	161611	161627	161639	161641
161659	161683	161717	161729	161731	161741	161743	161753
161761	161771	161773	161779	161783	161807	161831	161839

161869	161873	161879	161881	161911	161921	161923	161947
161957	161969	161971	161977	161983	161999	162007	162011
162017	162053	162059	162079	162091	162109	162119	162143
162209	162221	162229	162251	162257	162263	162269	162277
162287	162289	162293	162343	162359	162389	162391	162413
162419	162439	162451	162457	162473	162493	162499	162517
162523	162527	162529	162553	162557	162563	162577	162593
162601	162611	162623	162629	162641	162649	162671	162677
162683	162691	162703	162709	162713	162727	162731	162739
162749	162751	162779	162787	162791	162821	162823	162829
162839	162847	162853	162859	162881	162889	162901	162907
162917	162937	162947	162971	162973	162989	162997	163003
163019	163021	163027	163061	163063	163109	163117	163127
163129	163147	163151	163169	163171	163181	163193	163199
163211	163223	163243	163249	163259	163307	163309	163321
163327	163337	163351	163363	163367	163393	163403	163409
163411	163417	163433	163469	163477	163481	163483	163487
163517	163543	163561	163567	163573	163601	163613	163621
163627	163633	163637	163643	163661	163673	163679	163697
163729	163733	163741	163753	163771	163781	163789	163811
163819	163841	163847	163853	163859	163861	163871	163883
163901	163909	163927	163973	163979	163981	163987	163991
163993	163997	164011	164023	164039	164051	164057	164071
164089	164093	164113	164117	164147	164149	164173	164183
164191	164201	164209	164231	164233	164239	164249	164251
164267	164279	164291	164299	164309	164321	164341	164357
164363	164371	164377	164387	164413	164419	164429	164431
164443	164447	164449	164471	164477	164503	164513	164531
164569	164581	164587	164599	164617	164621	164623	164627
164653	164663	164677	164683	164701	164707	164729	164743
164767	164771	164789	164809	164821	164831	164837	164839

164881	164893	164911	164953	164963	164987	164999	165001
165037	165041	165047	165049	165059	165079	165083	165089
165103	165133	165161	165173	165181	165203	165211	165229
165233	165247	165287	165293	165311	165313	165317	165331
165343	165349	165367	165379	165383	165391	165397	165437
165443	165449	165457	165463	165469	165479	165511	165523
165527	165533	165541	165551	165553	165559	165569	165587
165589	165601	165611	165617	165653	165667	165673	165701
165703	165707	165709	165713	165719	165721	165749	165779
165799	165811	165817	165829	165833	165857	165877	165883
165887	165901	165931	165941	165947	165961	165983	166013
166021	166027	166031	166043	166063	166081	166099	166147
166151	166157	166169	166183	166189	166207	166219	166237
166247	166259	166273	166289	166297	166301	166303	166319
166349	166351	166357	166363	166393	166399	166403	166409
166417	166429	166457	166471	166487	166541	166561	166567
166571	166597	166601	166603	166609	166613	166619	166627
166631	166643	166657	166667	166669	166679	166693	166703
166723	166739	166741	166781	166783	166799	166807	166823
166841	166843	166847	166849	166853	166861	166867	166871
166909	166919	166931	166949	166967	166973	166979	166987
167009	167017	167021	167023	167033	167039	167047	167051
167071	167077	167081	167087	167099	167107	167113	167117
167119	167149	167159	167173	167177	167191	167197	167213
167221	167249	167261	167267	167269	167309	167311	167317
167329	167339	167341	167381	167393	167407	167413	167423
167429	167437	167441	167443	167449	167471	167483	167491
167521	167537	167543	167593	167597	167611	167621	167623
167627	167633	167641	167663	167677	167683	167711	167729
167747	167759	167771	167777	167779	167801	167809	167861
167863	167873	167879	167887	167891	167899	167911	167917

167953	167971	167987	168013	168023	168029	168037	168043
168067	168071	168083	168089	168109	168127	168143	168151
168193	168197	168211	168227	168247	168253	168263	168269
168277	168281	168293	168323	168331	168347	168353	168391
168409	168433	168449	168451	168457	168463	168481	168491
168499	168523	168527	168533	168541	168559	168599	168601
168617	168629	168631	168643	168673	168677	168697	168713
168719	168731	168737	168743	168761	168769	168781	168803
168851	168863	168869	168887	168893	168899	168901	168913
168937	168943	168977	168991	169003	169007	169009	169019
169049	169063	169067	169069	169079	169093	169097	169111
169129	169151	169159	169177	169181	169199	169217	169219
169241	169243	169249	169259	169283	169307	169313	169319
169321	169327	169339	169343	169361	169369	169373	169399
169409	169427	169457	169471	169483	169489	169493	169501
169523	169531	169553	169567	169583	169591	169607	169627
169633	169639	169649	169657	169661	169667	169681	169691
169693	169709	169733	169751	169753	169769	169777	169783
169789	169817	169823	169831	169837	169843	169859	169889
169891	169909	169913	169919	169933	169937	169943	169951
169957	169987	169991	170003	170021	170029	170047	170057
170063	170081	170099	170101	170111	170123	170141	170167
170179	170189	170197	170207	170213	170227	170231	170239
170243	170249	170263	170267	170279	170293	170299	170327
170341	170347	170351	170353	170363	170369	170371	170383
170389	170393	170413	170441	170447	170473	170483	170497
170503	170509	170537	170539	170551	170557	170579	170603
170609	170627	170633	170641	170647	170669	170689	170701
170707	170711	170741	170749	170759	170761	170767	170773
170777	170801	170809	170813	170827	170837	170843	170851
170857	170873	170881	170887	170899	170921	170927	170953

170957	170971	171007	171023	171029	171043	171047	171049
171053	171077	171079	171091	171103	171131	171161	171163
171167	171169	171179	171203	171233	171251	171253	171263
171271	171293	171299	171317	171329	171341	171383	171401
171403	171427	171439	171449	171467	171469	171473	171481
171491	171517	171529	171539	171541	171553	171559	171571
171583	171617	171629	171637	171641	171653	171659	171671
171673	171679	171697	171707	171713	171719	171733	171757
171761	171763	171793	171799	171803	171811	171823	171827
171851	171863	171869	171877	171881	171889	171917	171923
171929	171937	171947	172001	172009	172021	172027	172031
172049	172069	172079	172093	172097	172127	172147	172153
172157	172169	172171	172181	172199	172213	172217	172219
172223	172243	172259	172279	172283	172297	172307	172313
172321	172331	172343	172351	172357	172373	172399	172411
172421	172423	172427	172433	172439	172441	172489	172507
172517	172519	172541	172553	172561	172573	172583	172589
172597	172603	172607	172619	172633	172643	172649	172657
172663	172673	172681	172687	172709	172717	172721	172741
172751	172759	172787	172801	172807	172829	172849	172853
172859	172867	172871	172877	172883	172933	172969	172973
172981	172987	172993	172999	173021	173023	173039	173053
173059	173081	173087	173099	173137	173141	173149	173177
173183	173189	173191	173207	173209	173219	173249	173263
173267	173273	173291	173293	173297	173309	173347	173357
173359	173429	173431	173473	173483	173491	173497	173501
173531	173539	173543	173549	173561	173573	173599	173617
173629	173647	173651	173659	173669	173671	173683	173687
173699	173707	173713	173729	173741	173743	173773	173777
173779	173783	173807	173819	173827	173839	173851	173861
173867	173891	173897	173909	173917	173923	173933	173969

173977	173981	173993	174007	174017	174019	174047	174049
174061	174067	174071	174077	174079	174091	174101	174121
174137	174143	174149	174157	174169	174197	174221	174241
174257	174259	174263	174281	174289	174299	174311	174329
174331	174337	174347	174367	174389	174407	174413	174431
174443	174457	174467	174469	174481	174487	174491	174527
174533	174569	174571	174583	174599	174613	174617	174631
174637	174649	174653	174659	174673	174679	174703	174721
174737	174749	174761	174763	174767	174773	174799	174821
174829	174851	174859	174877	174893	174901	174907	174917
174929	174931	174943	174959	174989	174991	175003	175013
175039	175061	175067	175069	175079	175081	175103	175129
175141	175211	175229	175261	175267	175277	175291	175303
175309	175327	175333	175349	175361	175391	175393	175403
175411	175433	175447	175453	175463	175481	175493	175499
175519	175523	175543	175573	175601	175621	175631	175633
175649	175663	175673	175687	175691	175699	175709	175723
175727	175753	175757	175759	175781	175783	175811	175829
175837	175843	175853	175859	175873	175891	175897	175909
175919	175937	175939	175949	175961	175963	175979	175991
175993	176017	176021	176023	176041	176047	176051	176053
176063	176081	176087	176089	176123	176129	176153	176159
176161	176179	176191	176201	176207	176213	176221	176227
176237	176243	176261	176299	176303	176317	176321	176327
176329	176333	176347	176353	176357	176369	176383	176389
176401	176413	176417	176419	176431	176459	176461	176467
176489	176497	176503	176507	176509	176521	176531	176537
176549	176551	176557	176573	176591	176597	176599	176609
176611	176629	176641	176651	176677	176699	176711	176713
176741	176747	176753	176777	176779	176789	176791	176797
176807	176809	176819	176849	176857	176887	176899	176903

176921	176923	176927	176933	176951	176977	176983	176989
177007	177011	177013	177019	177043	177091	177101	177109
177113	177127	177131	177167	177173	177209	177211	177217
177223	177239	177257	177269	177283	177301	177319	177323
177337	177347	177379	177383	177409	177421	177427	177431
177433	177467	177473	177481	177487	177493	177511	177533
177539	177553	177589	177601	177623	177647	177677	177679
177691	177739	177743	177761	177763	177787	177791	177797
177811	177823	177839	177841	177883	177887	177889	177893
177907	177913	177917	177929	177943	177949	177953	177967
177979	178001	178021	178037	178039	178067	178069	178091
178093	178103	178117	178127	178141	178151	178169	178183
178187	178207	178223	178231	178247	178249	178259	178261
178289	178301	178307	178327	178333	178349	178351	178361
178393	178397	178403	178417	178439	178441	178447	178469
178481	178487	178489	178501	178513	178531	178537	178559
178561	178567	178571	178597	178601	178603	178609	178613
178621	178627	178639	178643	178681	178691	178693	178697
178753	178757	178781	178793	178799	178807	178813	178817
178819	178831	178853	178859	178873	178877	178889	178897
178903	178907	178909	178921	178931	178933	178939	178951
178973	178987	179021	179029	179033	179041	179051	179057
179083	179089	179099	179107	179111	179119	179143	179161
179167	179173	179203	179209	179213	179233	179243	179261
179269	179281	179287	179317	179321	179327	179351	179357
179369	179381	179383	179393	179407	179411	179429	179437
179441	179453	179461	179471	179479	179483	179497	179519
179527	179533	179549	179563	179573	179579	179581	179591
179593	179603	179623	179633	179651	179657	179659	179671
179687	179689	179693	179717	179719	179737	179743	179749
179779	179801	179807	179813	179819	179821	179827	179833

179849	179897	179899	179903	179909	179917	179923	179939
179947	179951	179953	179957	179969	179981	179989	179999
180001	180007	180023	180043	180053	180071	180073	180077
180097	180137	180161	180179	180181	180211	180221	180233
180239	180241	180247	180259	180263	180281	180287	180289
180307	180311	180317	180331	180337	180347	180361	180371
180379	180391	180413	180419	180437	180463	180473	180491
180497	180503	180511	180533	180539	180541	180547	180563
180569	180617	180623	180629	180647	180667	180679	180701
180731	180749	180751	180773	180779	180793	180797	180799
180811	180847	180871	180883	180907	180949	180959	181001
181003	181019	181031	181039	181061	181063	181081	181087
181123	181141	181157	181183	181193	181199	181201	181211
181213	181219	181243	181253	181273	181277	181283	181297
181301	181303	181361	181387	181397	181399	181409	181421
181439	181457	181459	181499	181501	181513	181523	181537
181549	181553	181603	181607	181609	181619	181639	181667
181669	181693	181711	181717	181721	181729	181739	181751
181757	181759	181763	181777	181787	181789	181813	181837
181871	181873	181889	181891	181903	181913	181919	181927
181931	181943	181957	181967	181981	181997	182009	182011
182027	182029	182041	182047	182057	182059	182089	182099
182101	182107	182111	182123	182129	182131	182141	182159
182167	182177	182179	182201	182209	182233	182239	182243
182261	182279	182297	182309	182333	182339	182341	182353
182387	182389	182417	182423	182431	182443	182453	182467
182471	182473	182489	182503	182509	182519	182537	182549
182561	182579	182587	182593	182599	182603	182617	182627
182639	182641	182653	182657	182659	182681	182687	182701
182711	182713	182747	182773	182779	182789	182803	182813
182821	182839	182851	182857	182867	182887	182893	182899

182921	182927	182929	182933	182953	182957	182969	182981
182999	183023	183037	183041	183047	183059	183067	183089
183091	183119	183151	183167	183191	183203	183247	183259
183263	183283	183289	183299	183301	183307	183317	183319
183329	183343	183349	183361	183373	183377	183383	183389
183397	183437	183439	183451	183461	183473	183479	183487
183497	183499	183503	183509	183511	183523	183527	183569
183571	183577	183581	183587	183593	183611	183637	183661
183683	183691	183697	183707	183709	183713	183761	183763
183797	183809	183823	183829	183871	183877	183881	183907
183917	183919	183943	183949	183959	183971	183973	183979
184003	184007	184013	184031	184039	184043	184057	184073
184081	184087	184111	184117	184133	184153	184157	184181
184187	184189	184199	184211	184231	184241	184259	184271
184273	184279	184291	184309	184321	184333	184337	184351
184369	184409	184417	184441	184447	184463	184477	184487
184489	184511	184517	184523	184553	184559	184567	184571
184577	184607	184609	184627	184631	184633	184649	184651
184669	184687	184693	184703	184711	184721	184727	184733
184753	184777	184823	184829	184831	184837	184843	184859
184879	184901	184903	184913	184949	184957	184967	184969
184993	184997	184999	185021	185027	185051	185057	185063
185069	185071	185077	185089	185099	185123	185131	185137
185149	185153	185161	185167	185177	185183	185189	185221
185233	185243	185267	185291	185299	185303	185309	185323
185327	185359	185363	185369	185371	185401	185429	185441
185467	185477	185483	185491	185519	185527	185531	185533
185539	185543	185551	185557	185567	185569	185593	185599
185621	185641	185651	185677	185681	185683	185693	185699
185707	185711	185723	185737	185747	185749	185753	185767
185789	185797	185813	185819	185821	185831	185833	185849

185869	185873	185893	185897	185903	185917	185923	185947
185951	185957	185959	185971	185987	185993	186007	186013
186019	186023	186037	186041	186049	186071	186097	186103
186107	186113	186119	186149	186157	186161	186163	186187
186191	186211	186227	186229	186239	186247	186253	186259
186271	186283	186299	186301	186311	186317	186343	186377
186379	186391	186397	186419	186437	186451	186469	186479
186481	186551	186569	186581	186583	186587	186601	186619
186629	186647	186649	186653	186671	186679	186689	186701
186707	186709	186727	186733	186743	186757	186761	186763
186773	186793	186799	186841	186859	186869	186871	186877
186883	186889	186917	186947	186959	187003	187009	187027
187043	187049	187067	187069	187073	187081	187091	187111
187123	187127	187129	187133	187139	187141	187163	187171
187177	187181	187189	187193	187211	187217	187219	187223
187237	187273	187277	187303	187337	187339	187349	187361
187367	187373	187379	187387	187393	187409	187417	187423
187433	187441	187463	187469	187471	187477	187507	187513
187531	187547	187559	187573	187597	187631	187633	187637
187639	187651	187661	187669	187687	187699	187711	187721
187751	187763	187787	187793	187823	187843	187861	187871
187877	187883	187897	187907	187909	187921	187927	187931
187951	187963	187973	187987	188011	188017	188021	188029
188107	188137	188143	188147	188159	188171	188179	188189
188197	188249	188261	188273	188281	188291	188299	188303
188311	188317	188323	188333	188351	188359	188369	188389
188401	188407	188417	188431	188437	188443	188459	188473
188483	188491	188519	188527	188533	188563	188579	188603
188609	188621	188633	188653	188677	188681	188687	188693
188701	188707	188711	188719	188729	188753	188767	188779
188791	188801	188827	188831	188833	188843	188857	188861

188863	188869	188891	188911	188927	188933	188939	188941
188953	188957	188983	188999	189011	189017	189019	189041
189043	189061	189067	189127	189139	189149	189151	189169
189187	189199	189223	189229	189239	189251	189253	189257
189271	189307	189311	189337	189347	189349	189353	189361
189377	189389	189391	189401	189407	189421	189433	189437
189439	189463	189467	189473	189479	189491	189493	189509
189517	189523	189529	189547	189559	189583	189593	189599
189613	189617	189619	189643	189653	189661	189671	189691
189697	189701	189713	189733	189743	189757	189767	189797
189799	189817	189823	189851	189853	189859	189877	189881
189887	189901	189913	189929	189947	189949	189961	189967
189977	189983	189989	189997	190027	190031	190051	190063
190093	190097	190121	190129	190147	190159	190181	190207
190243	190249	190261	190271	190283	190297	190301	190313
190321	190331	190339	190357	190367	190369	190387	190391
190403	190409	190471	190507	190523	190529	190537	190543
190573	190577	190579	190583	190591	190607	190613	190633
190639	190649	190657	190667	190669	190699	190709	190711
190717	190753	190759	190763	190769	190783	190787	190793
190807	190811	190823	190829	190837	190843	190871	190889
190891	190901	190909	190913	190921	190979	190997	191021
191027	191033	191039	191047	191057	191071	191089	191099
191119	191123	191137	191141	191143	191161	191173	191189
191227	191231	191237	191249	191251	191281	191297	191299
191339	191341	191353	191413	191441	191447	191449	191453
191459	191461	191467	191473	191491	191497	191507	191509
191519	191531	191533	191537	191551	191561	191563	191579
191599	191621	191627	191657	191669	191671	191677	191689
191693	191699	191707	191717	191747	191749	191773	191783
191791	191801	191803	191827	191831	191833	191837	191861

191899	191903	191911	191929	191953	191969	191977	191999
192007	192013	192029	192037	192043	192047	192053	192091
192097	192103	192113	192121	192133	192149	192161	192173
192187	192191	192193	192229	192233	192239	192251	192259
192263	192271	192307	192317	192319	192323	192341	192343
192347	192373	192377	192383	192391	192407	192431	192461
192463	192497	192499	192529	192539	192547	192553	192557
192571	192581	192583	192587	192601	192611	192613	192617
192629	192631	192637	192667	192677	192697	192737	192743
192749	192757	192767	192781	192791	192799	192811	192817
192833	192847	192853	192859	192877	192883	192887	192889
192917	192923	192931	192949	192961	192971	192977	192979
192991	193003	193009	193013	193031	193043	193051	193057
193073	193093	193133	193139	193147	193153	193163	193181
193183	193189	193201	193243	193247	193261	193283	193301
193327	193337	193357	193367	193373	193379	193381	193387
193393	193423	193433	193441	193447	193451	193463	193469
193493	193507	193513	193541	193549	193559	193573	193577
193597	193601	193603	193607	193619	193649	193663	193679
193703	193723	193727	193741	193751	193757	193763	193771
193789	193793	193799	193811	193813	193841	193847	193859
193861	193871	193873	193877	193883	193891	193937	193939
193943	193951	193957	193979	193993	194003	194017	194027
194057	194069	194071	194083	194087	194093	194101	194113
194119	194141	194149	194167	194179	194197	194203	194239
194263	194267	194269	194309	194323	194353	194371	194377
194413	194431	194443	194471	194479	194483	194507	194521
194527	194543	194569	194581	194591	194609	194647	194653
194659	194671	194681	194683	194687	194707	194713	194717
194723	194729	194749	194767	194771	194809	194813	194819
194827	194839	194861	194863	194867	194869	194891	194899

194911	194917	194933	194963	194977	194981	194989	195023
195029	195043	195047	195049	195053	195071	195077	195089
195103	195121	195127	195131	195137	195157	195161	195163
195193	195197	195203	195229	195241	195253	195259	195271
195277	195281	195311	195319	195329	195341	195343	195353
195359	195389	195401	195407	195413	195427	195443	195457
195469	195479	195493	195497	195511	195527	195539	195541
195581	195593	195599	195659	195677	195691	195697	195709
195731	195733	195737	195739	195743	195751	195761	195781
195787	195791	195809	195817	195863	195869	195883	195887
195893	195907	195913	195919	195929	195931	195967	195971
195973	195977	195991	195997	196003	196033	196039	196043
196051	196073	196081	196087	196111	196117	196139	196159
196169	196171	196177	196181	196187	196193	196201	196247
196271	196277	196279	196291	196303	196307	196331	196337
196379	196387	196429	196439	196453	196459	196477	196499
196501	196519	196523	196541	196543	196549	196561	196579
196583	196597	196613	196643	196657	196661	196663	196681
196687	196699	196709	196717	196727	196739	196751	196769
196771	196799	196817	196831	196837	196853	196871	196873
196879	196901	196907	196919	196927	196961	196991	196993
197003	197009	197023	197033	197059	197063	197077	197083
197089	197101	197117	197123	197137	197147	197159	197161
197203	197207	197221	197233	197243	197257	197261	197269
197273	197279	197293	197297	197299	197311	197339	197341
197347	197359	197369	197371	197381	197383	197389	197419
197423	197441	197453	197479	197507	197521	197539	197551
197567	197569	197573	197597	197599	197609	197621	197641
197647	197651	197677	197683	197689	197699	197711	197713
197741	197753	197759	197767	197773	197779	197803	197807
197831	197837	197887	197891	197893	197909	197921	197927

197933 197947 197957 197959 197963 197969 197971 198013
 198017 198031 198043 198047 198073 198083 198091 198097
 198109 198127 198139 198173 198179 198193 198197 198221
 198223 198241 198251 198257 198259 198277 198281 198301
 198313 198323 198337 198347 198349 198377 198391 198397
 198409 198413 198427 198437 198439 198461 198463 198469
 198479 198491 198503 198529 198533 198553 198571 198589
 198593 198599 198613 198623 198637 198641 198647 198659
 198673 198689 198701 198719 198733 198761 198769 198811
 198817 198823 198827 198829 198833 198839 198841 198851
 198859 198899 198901 198929 198937 198941 198943 198953
 198959 198967 198971 198977 198997 199021 199033 199037
 199039 199049 199081 199103 199109 199151 199153 199181
 199193 199207 199211 199247 199261 199267 199289 199313
 199321 199337 199343 199357 199373 199379 199399 199403
 199411 199417 199429 199447 199453 199457 199483 199487
 199489 199499 199501 199523 199559 199567 199583 199601
 199603 199621 199637 199657 199669 199673 199679 199687
 199697 199721 199729 199739 199741 199751 199753 199777
 199783 199799 199807 199811 199813 199819 199831 199853
 199873 199877 199889 199909 199921 199931 199933 199961
 199967 199999

共筛得素数的个数为：17984

0~5000 的素数有 669 个 5000 以内的素数有 669 个

5000~10000 的素数有 560 个 10000 以内的素数有 1229 个

10000~15000 的素数有 525 个 15000 以内的素数有 1754 个

15000~20000 的素数有 508 个 20000 以内的素数有 2262 个

20000~25000 的素数有 500 个 25000 以内的素数有 2762 个

25000~30000 的素数有 483 个 30000 以内的素数有 3245 个

30000~35000 的素数有 487 个	35000 以内的素数有 3732 个
35000~40000 的素数有 471 个	40000 以内的素数有 4203 个
40000~45000 的素数有 472 个	45000 以内的素数有 4675 个
45000~50000 的素数有 458 个	50000 以内的素数有 5133 个
50000~55000 的素数有 457 个	55000 以内的素数有 5590 个
55000~60000 的素数有 467 个	60000 以内的素数有 6057 个
60000~65000 的素数有 436 个	65000 以内的素数有 6493 个
65000~70000 的素数有 442 个	70000 以内的素数有 6935 个
70000~75000 的素数有 458 个	75000 以内的素数有 7393 个
75000~80000 的素数有 444 个	80000 以内的素数有 7837 个
80000~85000 的素数有 440 个	85000 以内的素数有 8277 个
85000~90000 的素数有 436 个	90000 以内的素数有 8713 个
90000~95000 的素数有 444 个	95000 以内的素数有 9157 个
95000~100000 的素数有 435 个	100000 以内的素数有 9592 个
100000~105000 的素数有 432 个	105000 以内的素数有 10024 个
105000~110000 的素数有 429 个	110000 以内的素数有 10453 个
110000~115000 的素数有 418 个	115000 以内的素数有 10871 个
115000~120000 的素数有 430 个	120000 以内的素数有 11301 个
120000~125000 的素数有 433 个	125000 以内的素数有 11734 个
125000~130000 的素数有 425 个	130000 以内的素数有 12159 个
130000~135000 的素数有 417 个	135000 以内的素数有 12576 个
135000~140000 的素数有 434 个	140000 以内的素数有 13010 个
140000~145000 的素数有 412 个	145000 以内的素数有 13422 个
145000~150000 的素数有 426 个	150000 以内的素数有 13848 个
150000~155000 的素数有 424 个	155000 以内的素数有 14272 个
155000~160000 的素数有 411 个	160000 以内的素数有 14683 个
160000~165000 的素数有 410 个	165000 以内的素数有 15093 个

165000~170000 的素数有 404 个	170000 以内的素数有 15497 个
170000~175000 的素数有 419 个	175000 以内的素数有 15916 个
175000~180000 的素数有 426 个	180000 以内的素数有 16342 个
180000~185000 的素数有 403 个	185000 以内的素数有 16745 个
185000~190000 的素数有 425 个	190000 以内的素数有 17170 个
190000~195000 的素数有 403 个	195000 以内的素数有 17573 个
195000~200000 的素数有 411 个	200000 以内的素数有 17984 个

参 考 文 献

- 1 潘承洞, 潘承彪. 初等数论. 北京: 北京大学出版社, 1999
- 2 李文林编. 王元论哥德巴赫猜想. 济南: 山东教育出版社, 1999
- 3 潘承洞, 潘承彪. 哥德巴赫猜想. 北京: 科学出版社, 1981
- 4 Emil Grosswald. Long arithmetic progressions that consist only of primes and 5 almost primes. Notices Amer. Math. Soc., 26 (1979) A451
- 5 Emil Grosswald. Arithmetic progressions that consist only of primes. J. Number Theory, 14 (1982) 9~31
- 6 Lander L J & Parkin T R. Consecutive primes in arithmetic progression. Math. Comput., 21 (1967) 489
- 7 Erdos P. On the difference of consecutive primes. Bull. Amer. Math. Soc., 54 (1948) 885-889; MR10, 235
- 8 维诺格拉陀夫 N M. 数论基础. 裘光明译. 北京: 高等教育出版社, 1956
- 9 盖伊 R K. 数论中未解决的问题. 张明尧译. 北京: 科学出版社, 2003

[General Information]

书名=哥德巴赫猜想与优化筛法

作者=司钊, 司琳著

页数=521

SS号=11831338

DX号=

出版日期=2005. 9

出版社=西北工业大学出版社

封面

书名

版权

前言

目录

引言

第一章 通用筛函数

1.1 概述

1.2 欧拉 (Euler) 函数

1.3 Eratosthenes筛法

1.4 自然数列的通用筛函数

1.5 通用筛函数的下界

1.6 预备定理

第二章 哥德巴赫猜想

2.1 求解证明

2.2 解的完备性问题

2.3 求解程序

2.4 实筛数据

第三章 偶数表为二素数之差

3.1 求解证明

3.2 解的无限性

3.3 小偶数的求证方法

3.4 求解程序

3.5 实筛数据

第四章 含素因子3, 5的偶数

4.1 求解证明

4.2 解的完备性问题

4.3 求解程序

4.4 实筛数据

第五章 素数的分项表示问题

5.1 求解证明

5.2 求解程序

5.3 实筛数据

第六章 孪生素数

6.1 求解证明

6.2 孪生素数的无限性

6.3 孪生素数的补充解

6.4 求解程序

6.5 实筛数据

第七章 双孪生素数

7.1 求解证明

7.2 双孪生素数的无限性

7.3 求解程序

7.4 实筛数据

第八章 展翅孪生素数

8.1 求解证明

8.2 展翅孪生素数的无限性

8.3 求解程序

8.4 实筛数据

第九章 相邻等差三素数

9.1 求解证明

9.2 相邻三素数等差级数的无限性

9.3 求解程序

9.4 实筛数据

第十章 相邻等差四素数

10.1 求解证明

10.2 相邻四素数等差级数的无限性

10.3 求解程序

10.4 实筛数据

第十一章 相邻等距三孪生素数

- 11.1 求解证明
- 11.2 相邻等距三孪生素数的无限性
- 11.3 求解程序
- 11.4 实筛数据

第十二章 素数等差级数

- 12.1 求解证明
- 12.2 求解程序
- 12.3 实筛数据

第十三章 孪生素数组成的双等差级数

- 13.1 求解证明
- 13.2 求解程序
- 13.3 实筛数据

第十四章 递减的素数间隙

- 14.1 求解证明
- 14.2 素数三间隙递减组合的无限性
- 14.3 求解程序
- 14.4 实筛数据

第十五章 递增的素数间隙

- 15.1 求解证明
- 15.2 素数三间隙递增组合的无限性
- 15.3 求解程序
- 15.4 实筛数据

第十六章 哥德巴赫猜想第二证法

- 16.1 求解证明
- 16.2 解的完备性问题
- 16.3 求解程序
- 16.4 实筛数据

附表 200000以内的素数表

参考文献